Feuille de calcul n°18 — Suites réelles

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 4n + 1$ **2.** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ **3.** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + (-1)^n$.

Solution.

1. $u_0 = 0^2 + 4 \times 0 + 1$ donc $\boxed{u_0 = 1}$, $u_1 = 1^2 + 4 \times 1 + 1$ donc $\boxed{u_1 = 6}$, $u_2 = 2^2 + 4 \times 2 + 1$ donc $\boxed{u_2 = 13}$ et $u_3 = 3^2 + 4 \times 3 + 1$ donc $\boxed{u_3 = 22}$.

2. $u_0 = \dfrac{4 \times 0 - 1}{0+1}$ donc $\boxed{u_0 = -1}$, $u_1 = \dfrac{4 \times 1 - 1}{1+1}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{3}{2}}$, $u_2 = \dfrac{4 \times 2 - 1}{2+1}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{7}{3}}$ et $u_3 = \dfrac{4 \times 3 - 1}{3+1}$ donc $\boxed{u_3 = \dfrac{11}{4}}$.

3. $u_0 = 0 + (-1)^0$ donc $\boxed{u_0 = 1}$, $u_1 = 1 + (-1)^1$ donc $\boxed{u_1 = 0}$, $u_2 = 2 + (-1)^2$ donc $\boxed{u_2 = 3}$ et $u_3 = 3 + (-1)^3$ donc $\boxed{u_3 = 2}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n - 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+2)u_n \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2n + 1} \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) u_n \end{cases}$.

Solution.

1. $u_1 = -u_0 - 1 = -(-1) - 1$ donc $\boxed{u_1 = 0}$, $u_2 = -u_1 - 1 = -0 - 1$ donc $\boxed{u_2 = -1}$, $u_3 = -u_2 - 1 = -(-1) - 1$ donc $\boxed{u_3 = 0}$ et $u_4 = -u_3 - 1 = -0 - 1$ donc $\boxed{u_4 = -1}$.

2. $u_1 = (0+2)u_0 = 2 \times 1$ donc $\boxed{u_1 = 2}$, $u_2 = (1+2)u_1 = 2 \times 3$ donc $\boxed{u_2 = 6}$, $u_3 = (2+2) \times u_2 = 4 \times 6$ donc $\boxed{u_3 = 24}$ et $u_4 = (3+2)u_3 = 5 \times 24$ donc $\boxed{u_4 = 120}$.

3. $u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2 \times 0 + 1} = \sqrt{(-1)^2 + 1}$ donc $\boxed{u_1 = \sqrt{2}}$, $u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2 \times 1 + 1} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 3}$ donc $\boxed{u_2 = \sqrt{5}}$, $u_3 = \sqrt{u_2^2 + 2 \times 2 + 1} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 5}$ donc $\boxed{u_3 = \sqrt{10}}$ et $u_4 = \sqrt{u_3^2 + 2 \times 3 + 1} = \sqrt{\sqrt{10}^2 + 7}$ donc $\boxed{u_4 = \sqrt{17}}$.

4. $u_1 = \left(0 + \dfrac{1}{2}\right) u_0 = \dfrac{1}{2} \times (-1)$ donc $\boxed{u_1 = -\dfrac{1}{2}}$, $u_2 = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) u_1 = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{u_2 = -\dfrac{3}{4}}$, $u_3 == \left(2 + \dfrac{1}{2}\right) u_2 = \dfrac{5}{2} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)$ donc $\boxed{u_3 = -\dfrac{15}{8}}$ et $u_4 == \left(3 + \dfrac{1}{2}\right) u_3 = \dfrac{7}{2} \times \left(-\dfrac{15}{8}\right)$ donc $\boxed{u_4 = -\dfrac{105}{16}}$.

Exercice 3. On considère une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_{100} dans chacun des cas suivants.

1. $a = 4$ et $r = 6$ **2.** $a = -2$ et $r = \dfrac{10}{3}$ **3.** $a = \dfrac{4}{3}$ et $r = \dfrac{17}{9}$

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 6n$ donc $\boxed{u_1 = 10,\ u_2 = 16,\ u_3 = 22 \text{ et } u_{100} = 604}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 + \dfrac{10}{3}n$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{4}{3},\ u_2 = \dfrac{14}{3},\ u_3 = \dfrac{24}{3} = 8 \text{ et } u_{100} = \dfrac{994}{3}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{3} + \dfrac{17}{9}n$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{29}{9},\ u_2 = \dfrac{46}{9},\ u_3 = \dfrac{63}{9} = 7 \text{ et } u_{100} = \dfrac{1712}{9}}$.

Exercice 4. On considère une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 dans chacun des cas suivants.

1. $a = 3$ et $q = 2$ **2.** $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $q = \sqrt{3}$ **3.** $a = 16$ et $q = \dfrac{3}{2}$

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$ donc $\boxed{u_1 = 6,\ u_2 = 12,\ u_3 = 24 \text{ et } u_4 = 48}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}^n = -\sqrt{3}^{n-1}$.

Ainsi, $\boxed{u_1 = -1,\ u_2 = -\sqrt{3},\ u_3 = -3 \text{ et } u_4 = -3\sqrt{3}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 16\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = 2^4 \times \dfrac{3^n}{2^n} = 2^{4-n}3^n$.

Ainsi, $\boxed{u_1 = 24,\ u_2 = 36,\ u_3 = 54 \text{ et } u_4 = 81}$.

Exercice 5. Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = \dfrac{n^3 + n + 1}{3n^2 + 6n + 7}$ **2.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ **3.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

4. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ **5.** $u_n = n\ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **6.** $u_n = (3n^2 + n)\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$

7. $u_n = \sin\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ **8.** $u_n = \cos\left(1 - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ **9.** $u_n = \dfrac{\ln(\cos(\frac{1}{n}))}{1 - \cos(\frac{2}{n})}$

Solution.

1. $u_n \sim \dfrac{n^3}{3n^2}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{n}{3}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $u_n \sim \dfrac{n \times n}{2}$ i.e. $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^2}{2}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $u_n \sim \dfrac{n \times n \times 2n}{6}$ i.e. $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^3}{3}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n \times n}$ i.e. $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n^2}}$.

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc, par produit, $u_n \sim n \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ i.e. $\boxed{u_n \sim -\sqrt{n}}$.

6. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2+1} = 0$, par théorème, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1 \sim -\dfrac{1}{n^2+1}$ donc

$$u_n \sim (3n^2+n) \times \left(-\frac{1}{n^2+1}\right) \sim -\frac{3n^2}{n^2} \sim -3$$

et ainsi $\boxed{u_n \sim -3}$.

7. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Ainsi, par théorème, $u_n \sim 1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, par théorème, $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{(\frac{1}{n})^2}{2} \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}}$.

8. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Or, $\lim\limits_{x\to 1} \cos(x) = \cos(1)$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cos(1)$. Comme $\cos(1) \neq 0$, on conclut que $\boxed{u_n \sim \cos(1)}$.

9. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, $\cos\left(\dfrac{2}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{(\frac{2}{n})^2}{2} \sim -\dfrac{2}{n^2}$ donc $1-\cos\left(\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n^2}$.
De plus, comme on l'a vu précédemment, $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ donc $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par théorème,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Par quotient, on en déduit que $u_n \sim \dfrac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{2}{n^2}} \sim -\dfrac{1}{4}$ donc $\boxed{u_n \sim -\dfrac{1}{4}}$.