Feuille de calcul n°17 — Dénombrement et probabilités – Corrigés

Exercice 1. Écrire sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles les nombres suivants.

$$A = \frac{5!}{3!} \qquad B = \frac{101!}{99!} \qquad C = \frac{7!}{3!^2} \qquad D = \frac{3! \times 6!}{4! \times 5!} \qquad E = 5! - 4! \qquad F = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.$$

Solution.
$A = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4$ donc $\boxed{A = 20}$.
$B = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100$ donc $\boxed{B = 10100}$.
$C = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!^2} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{6} = 7 \times 5 \times 4 = 7 \times 20$ donc $\boxed{C = 140}$.
$D = \dfrac{3! \times 6 \times 5!}{4 \times 3! \times 5!} = \dfrac{6}{4}$ donc $\boxed{D = \dfrac{3}{2}}$.
$E = 5 \times 4! - 4! = (5-1) \times 4! = 4 \times 24$ soit $\boxed{E = 96}$.
$F = \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5 \times 1}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{1}{5 \times 3 \times 2}$ soit $\boxed{F = \dfrac{1}{30}}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \qquad B = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \qquad C = \frac{(n^2-1)n!}{(n+2)!} \qquad D = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}.$$

Solution.
$A = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}$ donc $\boxed{A = n(n+1)(n+2)}$.
$B = \dfrac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!}$ donc $\boxed{B = (2n+1)(2n+2)}$.
$C = \dfrac{(n-1)(n+1)n!}{(n+2)(n+1)!} = \dfrac{(n-1)(n+1)!}{(n+2)(n+1)!}$ donc $\boxed{C = \dfrac{n-1}{n+2}}$.
$D = \dfrac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \dfrac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \dfrac{(n+1)^2}{n(n+1)n!(n+1)} = \dfrac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$
donc $\boxed{D = -\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}}$.

Exercice 3. Calculer les coefficients binomiaux suivants.

$$A = \binom{4}{2} \qquad B = \binom{9}{8} \qquad C = \binom{7}{3} \qquad D = \binom{125}{0} \qquad E = \binom{44}{43} \qquad F = \binom{9}{3}.$$

Solution.
$A = \dfrac{4 \times 3}{2}$ donc $\boxed{A = 6}$.
$B = \dbinom{9}{1}$ donc $\boxed{B = 9}$.

$C = \dfrac{7\times 6\times 5}{3!} = \dfrac{7\times 6\times 5}{6}$ donc $\boxed{C = 35}$.

$\boxed{D = 1}$

$E = \dbinom{44}{1}$ donc $\boxed{E = 44}$.

$F = \dfrac{9\times 8\times 7}{3!} = \dfrac{3\times 3\times 2\times 4\times 7}{3\times 2}$ donc $\boxed{F = 84}$.

Exercice 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \qquad B = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \qquad C = \binom{n+1}{n} - \binom{n}{n-1} \qquad D = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}.$$

Solution.

$A = n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{6n + n(n-1)(n-2)}{6} = \dfrac{n[6+(n-1)(n-2)]}{6}$ soit $\boxed{A = \dfrac{n(n^2-3n+8)}{6}}$.

$B = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6} = \dfrac{n(n-1)(3+n-2)}{6} = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$ soit $\boxed{B = \dfrac{n(n^2-1)}{6}}$.

$C = \dfrac{n+1}{1} - \dfrac{n}{1} = n+1-n$ donc $\boxed{C = 1}$.

$$D = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-(n+1))!} \times \frac{n!(2n-n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!}$$
$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{[(n+1)n!]^2} \times n!^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 n!^2} \times n!^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \text{ donc } \boxed{D = \frac{2(2n+1)}{n+1}}.$$

Exercice 5. On donne le tableau de probabilités suivant :

	B	$\overline{B}$
A	0,45	0,15
$\overline{A}$	0,07	0,33

Déterminer les probabilités suivantes.

$$\mathbf{P}(\overline{A}) \qquad \mathbf{P}(B) \qquad \mathbf{P}(A\cap B) \qquad \mathbf{P}(A\cup B) \qquad \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) \qquad \mathbf{P}(\overline{A}\cup B).$$

Solution.

Comme B et $\overline{B}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{A}\cap B) + \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}07 + 0{,}33$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}) = 0{,}4}$.

Comme A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B\cap A) + \mathbf{P}(B\cap\overline{A}) = 0{,}45 + 0{,}07$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = 0{,}52}$.

Par lecture du tableau, $\boxed{\mathbf{P}(A\cap B) = 0{,}45}$.

$\mathbf{P}(A\cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A\cap B) = 1 - 0{,}4 + 0{,}52 - 0{,}45$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A\cap B) = 0{,}67}$.

Par lecture du tableau, $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}33}$.

$\mathbf{P}(\overline{A}\cup B) = \mathbf{P}(\overline{A}) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{A}\cap B) = 0{,}4 + 0{,}52 - 0{,}07$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}\cup B) = 0{,}85}$.

Exercice 6. On considère deux évènements A et B d'une même expérience aléatoire.

1. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0{,}45$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}6$. Calculer $\mathbf{P}(\overline{A})$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$.
2. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0{,}05$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}1$ et $\mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}8$. Calculer $\mathbf{P}(A \mid B)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cup B)$.
3. On suppose que $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{3}{4}$. Calculer $\mathbf{P}(\overline{A})$, $\mathbf{P}(B \mid A)$, $\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \mid B)$.

Solution.

1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0{,}45$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}) = 0{,}55}$.

   $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}45 \times 0{,}6$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}27}$.

2. Par la formule de Bayes, $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(B)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}8}{0{,}1} = \dfrac{0{,}04}{0{,}1}$ soit $\boxed{\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}4}$.

   $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = 0{,}05 \times 0{,}8$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}04}$.

   $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}04$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}11}$.

3. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - \frac{3}{4}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{4}}$.

   $\mathbf{P}(B \mid A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}}$.

   De même, $\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - \frac{3}{4}$ donc $\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{4}$.

   Comme A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{7}{16}}$.

   Par la formule de Bayes, $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{6}{7}}$.