Feuille de calcul n°16 — Équations différentielles

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y' + 5y = 0$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y = 3y'$.
3. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_3) : y' + \frac{1}{2}y = 0$ telle que $y(0) = 1$.
4. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_4) : y' - y = 0$ telle que $y'(0) = 1$.

Solution.

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-5t} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
2. L'équation (E_2) est équivalente à $y' - \dfrac{1}{3}y = 0$ donc l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.
3. L'ensemble des solutions de (E_3) est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \mid C \in \mathbb{R}\}$. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Alors,
$$f(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^0 = 1 \iff C = 1.$$
Ainsi, l'unique solution y de (E_3) telle que $y(0) = 1$ est $\boxed{t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}}$.
4. L'ensemble des solutions de (E_4) est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^t \mid C \in \mathbb{R}\}$. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^t$. Alors, par définition $f' = f$ donc
$$f'(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^0 = 1 \iff C = 1.$$
Ainsi, l'unique solution y de (E_4) telle que $y'(0) = 1$ est $\boxed{\text{la fonction exponentielle}}$.

Exercice 2.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_3) : y'' - 2y' + 5y = 0$.

Solution.

1. L'équation caractéristique associée à (E_1) est $(C_1) : x^2 - 3x + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc (C_1) possède deux solutions réelles :
$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$
Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_1) est
$$\boxed{\{t \longmapsto A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

2. L'équation caractéristique associée à (E_2) est (C_2) : $x^2+x+\frac{1}{4}=0$. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times\frac{1}{4} = 0$ donc (C_2) possède une unique solution réelle :

$$x_0 = \frac{-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\{t \longmapsto (At+B)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\}}.$$

3. L'équation caractéristique associée à (E_3) est (C_3) : $x^2-2x+5=0$. Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 5 = -16 < 0$ donc (C_1) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-(-2)-\mathrm{i}\sqrt{16}}{2\times 1} = 1-2\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \overline{x_1} = 1+2\,\mathrm{i}\,.$$

Ainsi, par théorème, l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\{t \longmapsto \mathrm{e}^{t}(A\cos(2t)+B\sin(2t) \mid (A,B)\in\mathbb{R}^2\}}.$$

Exercice 3.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y'-3y=4$. On chercher une solution particulière constante.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_2) : $y'+3y=2t$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

3. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_3) : $y'+7y=\mathrm{e}^{-t}$ telle que $y(0)=1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t\longmapsto A\mathrm{e}^{-t}$ où $A\in\mathbb{R}$.

4. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_4) : $y'-y=\cos(t)$ telle que $y'(0)=1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t\longmapsto A\cos(t)+B\sin(t)$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. L'ensemble des solutions de l'équation (H_1) : $y'-3y=0$ est $\{t\longmapsto C\mathrm{e}^{3t} \mid C\in\mathbb{R}\}$.
Considérons une fonction constante $g : t\longmapsto a$ où $a\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel t, $g'(t)-3g(t) = -3a$ donc g est solution de (E_1) si et seulement si $-3a=4$ i.e. $a=-\dfrac{4}{3}$.
Par théorème, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{t\longmapsto C\mathrm{e}^{3t}-\frac{4}{3} \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}}.$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation (H_2) : $y'+3y=0$ est $\{t\longmapsto C\mathrm{e}^{-3t} \mid C\in\mathbb{R}\}$.
Considérons une fonction affine $g : t\longmapsto at+b$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout réel t, $g'(t)+3g(t) = a+3(at+b) = 3at+a+3b$ donc, pour que g soit solution de (E_2), il suffit que $3a=2$ et $a+3b=0$ i.e. $a=\dfrac{2}{3}$ et $b=-\dfrac{2}{9}$.
Par théorème, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{t\longmapsto C\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3}t-\frac{2}{9} \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}}.$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_3)\ : y' + 7y = 0$ est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-7t} \mid C \in \mathbb{R}\}$. Considérons une fonction de la forme $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^{-t}$ où $A \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) + 7g(t) = -A\mathrm{e}^{-t} + 7A\mathrm{e}^{-t} = 6A\mathrm{e}^{-t}$ donc, pour que g soit solution de (E_3), il suffit que $6a = 1$ i.e. $a = \dfrac{1}{6}$. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-7t} + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-7t} + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}$. Alors,

$$f(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^0 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^0 = 1 \iff C + \frac{1}{6} = 1 \iff C = \frac{5}{6}.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_3) telle que $y(0) = 1$ est $\boxed{t \longmapsto \dfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-7t} + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}}$.

4. L'ensemble des solutions de l'équation $(H_3)\ : y' - y = 0$ est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{t} \mid C \in \mathbb{R}\}$. Considérons deux réels A et B et la fonction $g : t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t)$. Alors, pour tout réel t,

$$g'(t) - g(t) = -A\sin(t) + B\cos(t) - (A\cos(t) + B\sin(t)) = (B - A)\cos(t) + (-A - B)\sin(t)$$

donc, pour que g soit solution de (E_4), il suffit que $B - A = 1$ i.e. $-A - B = 0$ i.e. $A = -B$ et $B - (-B) = 1$ soit $B = \dfrac{1}{2}$ et $A = -\dfrac{1}{2}$. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{1}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{2}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t)$. Alors, pour tout réel t, $f'(t) = C\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\sin(t) + \dfrac{1}{2}\cos(t)$ donc

$$f'(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{2}\sin(0) = 1 \iff C + \frac{1}{2} = 1 \iff C = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'unique solution y de (E_4) telle que $y'(0) = 1$ est $\boxed{t \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{2}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\sin(t)}$.

Exercice 4.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 3t + 2$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto at^2\mathrm{e}^{-2t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_3) : y'' + y' + \frac{1}{2}y = \cos(t)$ telle que $y(0) = y'(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution.

1. Considérons l'équation homogène $(H_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_1) : x^2 - 5x + 6 = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc (C_1) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

donc l'ensemble des solutions de (H_1) est $\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
Soit a et b deux réels et $g : t \longmapsto at + b$. Alors, pour tout réel t, $g''(t) - 5g'(t) + 6g't) = 0 - 5a + 6(at + b) = 6at - 5a + 6b$ donc, pour que g soit solution de (E_1), il suffit que $6a = 3$ et $-5a + 6b = 2$ i.e. $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{3}{4}$.
On conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2. Considérons l'équation homogène $(H_2) : y'' + 4y' + 4y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_2) : x^2 + 4x + 4 = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ donc (C_2) admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$$

donc l'ensemble des solutions de (H_2) est $\{t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{-2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
Soit a un réel et $g : t \longmapsto at^2\mathrm{e}^{-2t}$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) = a(2t\mathrm{e}^{-2t} + t^2(-2\mathrm{e}^{-2t})) = 2a(t - t^2)\mathrm{e}^{-2t}$ et $g''(t) = 2a((1 - 2t)\mathrm{e}^{-2t} + (t - t^2)(-2\mathrm{e}^{-2t}) = 2a(1 - 4t + 2t^2)\mathrm{e}^{-2t}$ donc

$$g''(t) + 4g'(t) + 4g(t) = 2a(1 - 4t + 2t^2)\mathrm{e}^{-2t} + 8a(t - t^2)\mathrm{e}^{-2t} + 4at^2\mathrm{e}^{-2t} = 2a\mathrm{e}^{-2t}.$$

Ainsi, pour que g soit solution de (E_2), il suffit que $2a = 1$ i.e. $a = \dfrac{1}{2}$.
On conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \left(\frac{1}{2}t^2 + At + B\right)\mathrm{e}^{-2t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

3. Considérons l'équation homogène $(H_3) : y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$ et l'équation caractéristique associée $(C_3) : x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$ donc (C_3) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{1}}{2 \times 1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \overline{x_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

donc l'ensemble des solutions de (H_3) est $\{t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}(A\cos(\frac{1}{2}t) + B\sin(\frac{1}{2}t) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
Soit a et b deux réels et $g : t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t)$. Alors, pour tout réel t, $g'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$ et $g''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$ donc

$$\begin{aligned} g''(t) + g'(t) + \frac{1}{2}g(t) &= -a\cos(t) - b\sin(t) + (-a\sin(t) + b\cos(t)) + \frac{1}{2}(a\cos(t) + b\sin(t)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}a + b\right)\cos(t) + \left(-a - \frac{1}{2}b\right)\sin(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que g soit solution de (E_3), il suffit que $-\dfrac{1}{2}a + b = 1$ et $-a - \dfrac{1}{2}b = 0$ i.e. $a = -\dfrac{1}{2}b$ et $\dfrac{5}{4}b = 1$ soit $b = \dfrac{4}{5}$ et $a = -\dfrac{2}{5}$.
On conclut que l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\boxed{\left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) - \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{4}{5}\sin(t) \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$