Feuille de calcul n°15 — Primitives — Corrigé

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \longmapsto 1$

2. $f : x \longmapsto 3x+2$

3. $f : x \longmapsto 1-\dfrac{x^2}{3}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{3}$

5. $f : x \longmapsto 3x(x+2)$

6. $f : x \longmapsto (x^2+1)^2$

Solution.

1. $F : x \longmapsto x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $F : x \longmapsto \dfrac{3}{2}x^2+2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. $F : x \longmapsto x-\dfrac{x^3}{9}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{3}x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

5. Pour tout réel x, $f(x)=3x^2+6x$ donc $F : x \longmapsto x^3+3x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x, $f(x)=x^4+2x^2+1$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{2}{3}x^3+x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto 2x\exp(x^2)$ avec $I=\mathbb{R}$

2. $f : x \longmapsto 3\cos(3x+1)$ avec $I=\mathbb{R}$

3. $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ avec $I=\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}$ avec $I=\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

5. $f : x \longmapsto (3x^2+2x)(x^3+x^2+1)^4$ avec $I=\mathbb{R}$

6. $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^3}$ avec $I=\mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. $F : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$).

2. $F : x \longmapsto \sin(3x+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (forme $u'\cos(u)$).

3. $F : x \longmapsto \ln(x^2+1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (forme $\frac{u'}{u}$).

4. $F : x \longmapsto 2\sqrt{3x+1}$ est une primitive de f sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ (forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$).

5. $F : x \longmapsto \dfrac{1}{5}(x^3+x^2+1)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (forme $u'u^n$).

6. $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{2(x^2+x)^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (forme $\frac{u'}{u^n}$).

Exercice 3. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3x+1}$ avec $I = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}$ avec $I =]-2\,;+\infty[$.
5. $f : x \longmapsto x(x^2+3)^4$ avec $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{(x^3+3x-4)^5}$ avec $I =]1\,;+\infty[$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x\mathrm{e}^{x^2}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{3x+1}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln(-3x-1)$ est une primitive de f sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$ car $3x+1<0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[$.
3. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car le discriminant de X^2+2X+3 est $\Delta = 2^2-4\times1\times3 = -8 < 0$ et $a = 1 > 0$ donc, pour tout réel x, $x^2+2x+3>0$.
4. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{6}\sqrt{x^3+8}$ est une primitive de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x(x^2+3)^4$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{10}(x^2+3)^5$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3x^2+3}{(x^3+3x-4)^5}$ donc $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{12(x^3+3x-4)^4}$ est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 4. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f : x \longmapsto x^2\cos(x^3)$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.
4. $f : x \longmapsto \left(\dfrac{x}{\cos(x^3)}\right)^2$ avec $I = [-1\,;1]$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2\cos(x^3)$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\sin(x^3)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}\sin(\ln(x))$ (forme $u'\sin(u)$) donc une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \longmapsto -\cos(\ln(x))$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ donc $F : x \longmapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{cos^2(x^3)}$ donc $F : x \longmapsto \frac{1}{3}\tan(x^3)$ est une primitive de f sur $[-1\,;1]$.