Feuille de calcul n°14 — Nombres complexes — Solutions

Exercice 1. Calculer les nombres complexes suivants. Les résultats seront donnés sous forme algébrique.

$$z_1 = (-1+3\,\mathrm{i})(7-\mathrm{i}) \qquad z_2 = (1+2\,\mathrm{i})^2 + 3(1+2\,\mathrm{i}) - \mathrm{i} \qquad z_3 = \frac{1-\mathrm{i}}{3+2\,\mathrm{i}} \qquad z_4 = \frac{1+4\,\mathrm{i}}{-1-2\,\mathrm{i}}.$$

Solution.

$z_1 = -7+\mathrm{i}+21\,\mathrm{i}-3\,\mathrm{i}^2 = -7+22\,\mathrm{i}+3$ donc $\boxed{z_1 = -4+22\,\mathrm{i}}$.

$z_2 = 1^2 + 2\times 1\times 2\,\mathrm{i} + (2\,\mathrm{i})^2 + 3 + 6\,\mathrm{i} - \mathrm{i} = 1+4\,\mathrm{i}-4+3+5\,\mathrm{i}$ donc $\boxed{9\,\mathrm{i}}$.

$z_3 = \dfrac{(1-\mathrm{i})(3-2\,\mathrm{i})}{3^2+2^2} = \dfrac{3-2\,\mathrm{i}-3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}^2}{13} = \dfrac{3-5\,\mathrm{i}-2}{13}$ donc $\boxed{z_3 = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}\,\mathrm{i}}$.

$z_4 = \dfrac{(1+4\,\mathrm{i})(-1+2\,\mathrm{i})}{(-1)^2+(-2)^2} = \dfrac{-1+2\,\mathrm{i}-4\,\mathrm{i}+8\,\mathrm{i}^2}{5} = \dfrac{-1-2\,\mathrm{i}-8}{5}$ donc $\boxed{z_4 = -\dfrac{9}{5} - \dfrac{2}{5}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 2. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \quad z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} \quad z_5 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} \quad z_6 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \quad z_7 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} \quad z_8 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi}.$$

Solution.

$z_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{z_1 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

$z_2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

$z_3 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $\boxed{z_3 = \mathrm{i}}$.

$z_4 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)$ donc $\boxed{z_4 = -1}$.

$z_5 = \overline{z_1}$ donc $\boxed{z_5 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

$z_6 = \overline{z_2}$ donc $\boxed{z_6 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

$z_7 = \overline{z_3}$ donc $\boxed{z_7 = -\mathrm{i}}$.

$z_8 = \overline{z_4}$ donc $\boxed{z_8 = -1}$.

Exercice 3. Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle.

$$z_1 = \mathrm{i} \qquad z_2 = -\mathrm{i} \qquad z_3 = 1+\mathrm{i} \qquad z_4 = 1-\mathrm{i} \qquad z_5 = \sqrt{3}+\mathrm{i} \qquad z_6 = \sqrt{3}-\mathrm{i}\,.$$

Solution.
$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\boxed{z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$.
$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\boxed{z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$.
$|z_3| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et ainsi $z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $\boxed{z_3 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.
$z_4 = \overline{z_3}$ donc $\boxed{z_4 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.
$|z_5| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ et ainsi $z_5 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $\boxed{z_5 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.
$z_6 = \overline{z_5}$ donc $\boxed{z_6 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnues z.

$$(E_1) : z^2 - 8z + 25 = 0 \qquad (E_2) : z^2 + z + 1 = 0.$$

Solution.
• Le discriminant de (E_1) est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 64 - 100 = -36 < 0$ donc (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-8) - \mathrm{i}\sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{8 - 6\,\mathrm{i}}{2} = 4 - 3\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = 4 + 3\,\mathrm{i}\,.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{4 + 3\,\mathrm{i}\,, 4 - 3\,\mathrm{i}\,\}}$.

• Le discriminant de (E_2) est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc (E_2) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2 \times 1} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$.

Exercice 5. Soit $(\alpha, \beta) \in \,]0\,;\pi[^2$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\beta}$. Déterminer module et argument de z.

Solution. On écrit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)$ donc, d'après les formules d'Euler,

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta}{2}}\left(2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\beta+\pi}{2}}.$$

Comme $(\alpha, \beta) \in \,]0\,;\pi[^2$, $\alpha + \beta \in \,]0\,;2\pi[$ donc $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \,]0\,;\pi[$. Ainsi, $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ donc l'écriture précédente est la forme exponentielle de z.

On en déduit que $\boxed{|z| = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ et que } \arg(z) = \frac{\alpha-\beta+\pi}{2}\ [2\pi]}$.

Exercice 6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Linéariser

$$\cos^2(t) \qquad \sin^3(t) \qquad \sin^3(2t)\cos^2(t).$$

Solution.

- D'après les formules d'Euler, $\cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}$ donc

$$\cos^2(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^2 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})^2}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t}}{4} + \frac{1}{2}$$

Or, par les formules d'Euler, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t} = 2\cos(2t)$ donc finalement, $\boxed{\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}}$.

- D'après les formules d'Euler, $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}$ donc

$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2\,\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})^3}{-8\,\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,t} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,t}}{8\,\mathrm{i}} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,t}}{8\,\mathrm{i}} + \frac{3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})}{8\,\mathrm{i}}\end{aligned}$$

Or, par les formules d'Euler, $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\,t} = 2\,\mathrm{i}\sin(3t)$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} = 2\,\mathrm{i}\sin(t)$ donc finalement, $\sin^3(t) = -\dfrac{2\,\mathrm{i}\sin(3t)}{8\,\mathrm{i}} + \dfrac{3 \times 2\,\mathrm{i}\sin(t)}{8\,\mathrm{i}}$ i.e. $\boxed{\sin^3(t) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)}$.

- D'après les formules d'Euler, $\sin(2t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t}}{2\,\mathrm{i}}$ et $\cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}$ donc

$$\begin{aligned}\sin^3(2t)\cos^2(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t}}{2\,\mathrm{i}}\right)^3\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{2}\right)^2 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2t})^3}{-8\,\mathrm{i}} \times \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})^2}{4} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\,t} - 3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\,t}}{8\,\mathrm{i}} \times \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t}}{4} \\ &= -\frac{(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\,t} - 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\,t})\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t})}{32\,\mathrm{i}} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\,t} + 2\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,t} - 3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,t} - 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} - 3 + 3 + 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t} + 3\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,t} - 2\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\,t}}{32\,\mathrm{i}} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\,t} + 2(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\,t}) - 2(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\,t}) - 6(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,t})}{32\,\mathrm{i}}\end{aligned}$$

donc, par les formules d'Euler,

$$\sin^3(2t)\cos^2(t) = -\frac{2\,\mathrm{i}\sin(8t) + 2(2\,\mathrm{i}\sin(6t)) - 2(2\,\mathrm{i}\sin(4t)) - 6(2\,\mathrm{i}\sin(2t))}{32\,\mathrm{i}}$$

soit finalement $\boxed{\sin^3(2t)\cos^2(t) = -\frac{1}{16}\sin(8t) - \frac{1}{8}\sin(6t) + \frac{1}{8}\sin(4t) + \frac{3}{8}\sin(2t)}$.