Feuille de calcul n°14 — Dérivation

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

1. $f : x \longmapsto 7x^2$

2. $f : x \longmapsto 4x + 5x^2$

3. $f : x \longmapsto 33x + 9x$

4. $f : x \longmapsto 7$

5. $f : x \longmapsto 12x^2 + 6$

6. $f : x \longmapsto -4x^2 + 56x - 96$

Solution.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = 14x$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 4 + 10x$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = 33 + 9 = 42$.

4. Pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

5. Pour tout réel x, $f'(x) = 24x$.

6. Pour tout réel x, $f'(x) = -8x + 56$.

Exercice 2. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in D$.

1. $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ avec $D = \mathbb{R}$

2. $f : x \longmapsto (3x^2 + 2x - 5)(1 - 2x)$ avec $D = \mathbb{R}$

3. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{4}\left(\sqrt{x} + 1\right)$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

4. $f : x \longmapsto \left(1 - \dfrac{2x^3}{7}\right) \times \dfrac{\ln(x)}{2}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

5. $f : x \longmapsto (x^3 + 4x - 1)(x^2 - 5)$ avec $D = \mathbb{R}$

6. $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$

Solution.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^2$.

2. Pour tout réel x,
$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x + 2)(1 - 2x) + (3x^2 + 2x - 5) \times (-2) \\ &= 6x - 12x^2 + 2 - 4x - 6x^2 - 4x + 10 \\ &= -18x^2 - 2x + 12. \end{aligned}$$

3. Pour tout réel $x > 0$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{4}\left(\sqrt{x} + 1\right) + \frac{x^2}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{2}\left(\sqrt{x} + 1\right) + \frac{x^2 \times \sqrt{x}}{8x} \\ &= \frac{4x\left(\sqrt{x} + 1\right)}{8} + \frac{x\sqrt{x}}{8} \\ &= \frac{x\left(5\sqrt{x} + 4\right)}{8} \end{aligned}$$

4. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \left(-\dfrac{6x^2}{7}\right) \times \dfrac{\ln(x)}{2} + \left(1 - \dfrac{2x^3}{7}\right) \times \dfrac{1}{2x} = -\dfrac{3x^2\ln(x)}{7} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x^2}{7}$.

5. Pour tout réel x, $f'(x) = (3x^2+4)\times(x^2-5)+(x^3+4x-1)\times 2x.$
$$= 3x^4 - 15x^2 + 4x^2 - 20 + 2x^4 + 8x^2 - 2x$$
$$= 5x^4 - 3x^2 - 2x - 20$$

6. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1\times\sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}.$

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in D$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ avec $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. $f : x \longmapsto \dfrac{3x-4}{2x+1}$ avec $I = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$.

3. $f : x \longmapsto \dfrac{8+3x}{1-6x}$ avec $D = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{6}\}$.

4. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2x-8}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*\setminus\{4\}$.

5. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+18x}{6x+4}$ avec $D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$.

6. $f : x \longmapsto \dfrac{3x-2}{2x^2-3x+5}$ avec $D = \mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}.$

2. Pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$, $f'(x) = \dfrac{3\times(2x+1)-(3x-4)\times 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{11}{(2x+1)^2}.$

3. Pour tout réel $x \neq \frac{1}{6}$, $f'(x) = \dfrac{3(1-6x)-(8+3x)\times(-6)}{(1-6x)^2} = \dfrac{51}{(1-6x)^2}.$

4. Pour tout réel $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-8) - \sqrt{x}\times 2}{(2x-8)^2} = \dfrac{2x-8-(2\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(2x-8)^2} = \dfrac{-2x-8}{2\sqrt{x}(2x-8)^2}$
$$= -\frac{x+4}{\sqrt{x}(2x-8)^2}$$

5. ATTENTION ! Il y avait une erreur dans l'énoncé.

Pour tout réel $x \neq -\frac{2}{3}$, $f'(x) = \dfrac{(2x+18)(6x+4)-(x^2+18x)\times 6}{(6x+4)^2}$
$$= \frac{12x^2+8x+108x+72-6x^2-108x}{(6x+4)^2}$$
$$= \frac{6x^2+8x+72}{(6x+4)^2}$$

6. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3(2x^2-3x+5)-(3x-2)(4x-3)}{(2x^2-3x+5)^2}$
$$= \frac{6x^2-9x+15-(12x^2-9x-8x+6)}{(2x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{-6x^2+8x+9}{(2x^2-3x+5)^2}$$

Exercice 4. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in D$.

1. $f : x \longmapsto \cos(3x+5)$ avec $D = \mathbb{R}$.

2. $f : x \longmapsto \sin(1-2x)$ avec $D = \mathbb{R}$.

3. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2+5x-1}$ avec $D = \mathbb{R}$.

4. $f : x \longmapsto \ln(x^2-1)$ avec $D =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

5. $f : x \longmapsto (6x^2+3x+7)^3$ avec $D = \mathbb{R}$.

6. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{5x-3}}$ avec $D = \left]\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$.

7. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{3x}{2-x}}$ avec $D =]0\,;2[$.

8. $f : x \longmapsto \tan(\sqrt{x})$ avec $D = \left]0\,;\frac{\pi^2}{4}\right[$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = -3\sin(3x+5)$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = -2\cos(1-2x)$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = (2x+5)\mathrm{e}^{x^2+5x-1}$.

4. Pour tout réel $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

5. Pour tout réel x, $f'(x) = 3(12x+3)(6x^2+3x+7)^2$.

6. Pour tout réel $x > \frac{3}{5}$, $f'(x) = -\dfrac{\frac{5}{2\sqrt{5x-3}}}{\sqrt{5x-3}^2} = -\dfrac{5}{2\sqrt{5x-3}^3}$.

7. Pour tout $x \in D$, $f(x) = \dfrac{\frac{3(2-x)-3x\times(-1)}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{3x}{2-x}}} = \dfrac{\frac{6}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{3x}{2-x}}} = \dfrac{3}{(2-x)^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{3x}}$.

8. Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (1+\tan^2(\sqrt{x})) = \dfrac{1+\tan^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.