Feuille de calcul n°13 — Calcul de limites (I)

Exercice 1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} 2024-x \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2024-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2024-\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} 3x^2+2x^3$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2+\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}-2 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Solution.
Par différence, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2024-x=-\infty}$.

Par quotient, on déduit de la limite précédente que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2024-x}=0}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, par différence, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2024-\frac{1}{x}=2024}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} 3x^2=\lim_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$, par somme, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 3x^2+2x^3=+\infty}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, par somme, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 3x^2+\frac{1}{x}=+\infty}$.

Par somme, $\lim_{x\to+\infty} 3x^2+1=+\infty$ donc, par inverse, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^2+1}=0}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x}=0$, par différence, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}-2=-2}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$, par quotient, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^2 \qquad \lim_{x\to-\infty} 2024-x \qquad \lim_{x\to-\infty} 2024-\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to-\infty} 3x^2-2x^3$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^2+\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}-2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Solution.
Comme $3>0$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, par produit, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty}$.

Par différence, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} 2024-x=+\infty}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, par différence, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} 2024-\frac{1}{x}=2024}$.

Comme $\lim_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$, par différence, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} 3x^2-2x^3=+\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + \dfrac{1}{x} = +\infty}$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + 1 = +\infty$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{3x^2+1} = 0}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x} = 0$, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2 = -2}$.

La dernière limite n'a pas de sens puisque la fonction racine carrée n'est pas définie au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 2023} \frac{1}{2024-x} \qquad \lim_{x\to 1} 3x^2 + \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x \ln(x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)\sin(x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)+2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$$

Solution.

Comme $\lim\limits_{x\to 2023} 2024 - 2023 = 1$, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2023} 2024 - x = 1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + \dfrac{1}{x} = 4}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x \ln(x) = -\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x} = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)\sin(x) = 0}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0^+$, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$, par somme et inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln(x)+2} = \dfrac{1}{2}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 = e$, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0}$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-2x} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4-2x} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{1}{(4-2x)^2} \qquad \lim_{x\to 0^+} 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x)} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln(x)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\mathrm{e}^x} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-\mathrm{e}^x}$$

Solution.

$\lim\limits_{x\to 2^+} 4 - 2x = 0^-$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{4-2x} = -\infty}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} 4 - 2x = 0^+$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{4-2x} = +\infty}$.

$\lim\limits_{x\to 2} (4-2x)^2 = 0^+$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(4-2x)^2} = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ (par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$) par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ (par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$), par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1^+$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}$), par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \mathrm{e}^x = 0^-$ et ainsi, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x} = -\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1^-$ (par croissance de exp sur $\mathbb{R}$), par différence, $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 - \mathrm{e}^x = 0^+$ et ainsi, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x} = +\infty}$.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^2 \qquad \lim_{x\to+\infty} 3x - \frac{x^3}{3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+10x^2+1}{x^2+5} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2024}{(x-3)^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-\mathrm{e}^x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)-1}{\ln(x^2)+2}$$

Solution.

Pour tout réel x, $\dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{4}x^2 = x^2\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4} = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{4}x^2 = +\infty}$.

Pour tout réel x, $3x - \dfrac{x^3}{3} = x\left(3 - \dfrac{x^2}{3}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{x^2}{3} = -\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \dfrac{x^3}{3} = -\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{3x+1}{x^2-1} = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x^2-1} = 0}$.

Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{3x+1}{x-1} = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x-1} = 1}$.

Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{-x^3+10x^2+1}{x^2+5} = \dfrac{x^2\left(-x+10+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{-x+10+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + 10 + \dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{5}{x^2} = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3+10x^2+1}{x^2+5} = -\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{2x^2+2024}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2\left(2+\frac{2024}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)^2} = \dfrac{2+\frac{2024}{x^2}}{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{2024}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^2 = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2024}{(x-3)^2} = 2}$.

Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par inverse et différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} - 1 = -1$ et ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1-\mathrm{e}^x} = -\infty}$.

Pour tout $x < e^{-1}$, $\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x^2)+2} = \dfrac{\ln(x)-1}{2\ln(x)+2} = \dfrac{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(2+\frac{2}{\ln(x)}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{\ln(x)}}{2+\frac{2}{\ln(x)}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par quotients et sommes, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\ln(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{2}{\ln(x)} = 2$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x^2)+2} = \dfrac{1}{2}}$.