Feuille de calcul n°12 — Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 1. Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$.

$$A = \ln(16) \qquad B = \ln(8) \qquad C = \ln(2\mathrm{e}^2) \qquad D = \ln(6) - \ln(3)$$

Solution.
$A = \ln(2^4)$ donc $\boxed{A = 4\ln(2)}$
$B = \ln(2^3)$ donc $\boxed{B = 3\ln(2)}$
$C = \ln(2) + \ln(\mathrm{e}^2)$ donc $\boxed{C = \ln(2) + 2}$
$D = \ln\left(\dfrac{6}{3}\right)$ donc $\boxed{D = \ln(2)}$

Exercice 2. Simplifier au maximum l'écriture des nombres suivants.

$$A = \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \qquad B = \ln(\mathrm{e}^2\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \qquad C = \frac{\ln(\mathrm{e}^5)}{\ln(\mathrm{e}^3)} \qquad D = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^3}\right)$$

Solution.
$A = \ln\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right] = \ln\left(\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2\right) = \ln(3-2) = \ln(1)$ donc $\boxed{A = 0}$.
$B = \ln(\mathrm{e}^2) + \ln\left(\sqrt{e}\right) - \ln(e) = 2 + \dfrac{1}{2}\ln(e) - 1 = 1 + \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{B = \dfrac{3}{2}}$
$\boxed{C = \dfrac{5}{3}}$
$D = \ln(\mathrm{e}^2)$ donc $\boxed{D = 2}$

Exercice 3. Soit a et b deux réels tels que $b > 0$. Simplifier l'écriture des nombres suivants.

$$A = \frac{e^{a^2}}{(\mathrm{e}^a)^2} \qquad B = \frac{\mathrm{e}^{a^2+2a}}{\mathrm{e}^{(a+1)^2}} \qquad C = \mathrm{e}^{2\ln(b)} \qquad D = \ln(2b) - \ln(b) \qquad E = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b^2).$$

Solution.
$A = \dfrac{\mathrm{e}^{a^2}}{\mathrm{e}^{2a}}$ donc $\boxed{A = \mathrm{e}^{a^2-2a}}$.
$B = \dfrac{a^2+2a}{\mathrm{e}^{a^2+2a+1}} = \mathrm{e}^{a^2+2a-(a^2+2a+1)}$ donc $\boxed{B = \mathrm{e}^{-1}}$
$C = \mathrm{e}^{\ln(b^2)}$ donc $\boxed{C = b^2}$
$D = \ln\left(\dfrac{2b}{b}\right)$ donc $\boxed{D = \ln(2)}$
$E = \ln\left(\dfrac{b^2}{b}\right)$ donc $\boxed{E = \ln(b)}$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2}$ $\quad(E_2)$ $\mathrm{e}^x = e$ $\quad(E_3)$ $\mathrm{e}^{2x+1} = 2$ $\quad(E_4)$ $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^3$

(E_5) $\mathrm{e}^x = 1$ $\quad(E_6)$ $\mathrm{e}^x + 4 = 0$ $\quad(E_7)$ $\mathrm{e}^{x^2} = e$ $\quad(E_8)$ $\mathrm{e}^{x^2+1} = 1$

Solution.

- $(E_1) \iff x = -2$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{-2\}}$.

- $(E_2) \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 \iff x = 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{1\}}$.

- $(E_3) \iff 2x + 1 = \ln(2) \iff x = \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{\dfrac{\ln(2) - 1}{2}\right\}}$.

- $(E_4) \iff x + 2 = 3 \iff x = 1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{1\}}$.

- $(E_5) \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \{0\}}$.

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\mathrm{e}^x + 4 > 0$ et ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \varnothing}$.

- $(E_7) \iff \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \{-1\,;1\}}$.

- $(E_8) \iff \mathrm{e}^{x^2+1} = \mathrm{e}^0 \iff x^2 + 1 = 0$

Or, pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \varnothing}$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $(\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3) = 0$ $\quad(E_2)$ $(3x + 1)\mathrm{e}^x = 0$ $\quad(E_3)$ $(2x - 1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ $\quad(E_4)$ $x\mathrm{e}^{x+3} = 2\mathrm{e}^{x+3}$

Solution.

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 3 > 0$ donc $\mathrm{e}^x + 3 \neq 0$ et ainsi

$$(E_1) \iff \mathrm{e}^x - 3 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln(3)$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{\ln(3)\}}$.

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \neq 0$ donc

$$(E_2) \iff 3x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}}$.

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \neq 0$ donc, en divisant par e^x,

$$(E_3) \iff 2x - 1 = 1 \iff x = 1.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{1\}}$.

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x+3} \neq 0$ donc, en divisant par e^{x+3},

$$(E_4) \iff x = 2.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{2\}}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

(E_1) $\ln(1+3x) = \ln(x+1)$	(E_2) $\ln(x-3) - 1 = 0$
(E_3) $\ln(x) + \ln(x-1) = 0$	(E_4) $\ln(4-x) = 0$
(E_5) $\ln(x) - \ln(1-x) = \ln(2)$	(E_6) $\ln(2x+1) - \ln(x-3) = \ln(x+5)$
(E_7) $\ln(x-1) - \ln(2-x) = \ln(6x)$	(E_8) $\ln(x^2) = \ln(x)^2$

Solution.

- L'équation (E_1) a un sens si et seulement si $1+3x > 0$ et $x+1 > 0$ i.e. $x > -\dfrac{1}{3}$ et $x > -1$ soit $x > -\dfrac{1}{3}$. De plus, pour tout $x > -\dfrac{1}{3}$,

$$(E_1) \iff 1+3x = x+1 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

Comme $0 > -\dfrac{1}{3}$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

- L'équation (E_2) a un sens si et seulement si $x-3 > 0$ i.e. $x > 3$ et, pour tout $x > 3$,

$$(E_2) \iff \ln(x-3) = 1 \iff x-3 = e \iff x = e+3$$

Comme $e+3 > 3$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{e+3\}}$.

- L'équation (E_3) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $x-1 > 0$ i.e. $x > 0$ et $x > 1$ soit $x > 1$. De plus, pour tout $x > 1$,

$$(E_3) \iff \ln(x(x-1)) = 0 \iff x(x-1) = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Or, le discriminant de $x^2 - x - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

- L'équation (E_4) a un sens si et seulement si $4-x > 0$ i.e. $x < 4$ et, pour tout $x < 4$,

$$(E_4) \iff 4 - x = 1 \iff x = 3$$

Comme $3 < 4$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{3\}}$.

• L'équation (E_5) a un sens si et seulement si $x>0$ et $1-x>0$ i.e. $x>0$ et $x<1$ soit $x\in\,]0\,;1[$. De plus, pour tout $x\in\,]0\,;1[$,

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff \ln(x)=\ln(2)+\ln(1-x) \iff \ln(x)=\ln(2(1-x)) \iff x=2(1-x)\\ &\iff x=2-2x \iff 3x=2 \iff x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{3}\in\,]0\,;1[$, on conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \left\{\frac{2}{3}\right\}}$.

• L'équation (E_6) a un sens si et seulement si $2x+1>0$, $x-3>0$ et $x+5>0$ i.e. $x>-\frac{1}{2}$, $x>3$ et $x>-5$ soit $x>3$. De plus, pour tout $x>3$,

$$\begin{aligned}(E_6) &\iff \ln(2x+1)=\ln(x+5)+\ln(x-3) \iff \ln(2x+1)=\ln((x+5)(x-3))\\ &\iff 2x+1=(x+5)(x-3) \iff 2x+1=x^2-3x+5x-15\\ &\iff x^2=16 \iff x=4 \text{ ou } x=-4\end{aligned}$$

Comme $-4<4$ et $4>3$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{4\}}$.

• L'équation (E_7) a un sens si et seulement si $x-1>0$, $2-x>0$ et $6x>0$ i.e. $x>1$, $x<2$ et $x>0$ soit $x\in\,]1\,;2[$. De plus, pour tout $x\in\,]1\,;2[$,

$$\begin{aligned}(E_7) &\iff \ln(x-1)=\ln(6x)+\ln(2-x) \iff \ln(x-1)=\ln(6x(2-x))\\ &\iff x-1=6x(2-x) \iff x-1=12x-6x^2 \iff 6x^2-11x-1=0\end{aligned}$$

Or, le discriminant de $6x^2-11x-1$ est $\Delta=(-11)^2-4\times6\times(-1)=145>0$ donc l'équation $6x^2-11x-1=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-(-11)-\sqrt{145}}{2\times6}=\frac{11-\sqrt{145}}{12} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-11)+\sqrt{145}}{2\times6}=\frac{11+\sqrt{145}}{12}.$$

Comme $x_1<1$ et $x_2\in\,]1\,;2[$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \left\{\frac{11+\sqrt{145}}{12}\right\}}$.

• L'équation (E_8) a un sens si et seulement si $x^2>0$ et $x>0$ i.e. $x>0$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}(E_8) &\iff 2\ln(x)=\ln(x)^2 \iff \ln(x)^2-2\ln(x)=0 \iff \ln(x)(\ln(x)-2)=0\\ &\iff \ln(x)=0 \text{ ou } \ln(x)-2=0 \iff x=1 \text{ ou } \ln(x)=2 \iff x=1 \text{ ou } x=e^2\end{aligned}$$

Comme $1>0$ et $e^2>0$, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_8) \text{ est } \{1\,;e^2\}}$.