Feuille de calcul n°11 — Sommes — Corrigé

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes familles de réels $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

$a)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{n} a_k$

$b)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$c)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2a_k = 2\sum_{k=1}^{n} a_k$

$d)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

$e)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

$f)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - 2b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} b_k$

Solution Les égalités $b)$, $c)$ et $f)$ sont vraies pour toutes familles de réelles $(a_i)_{\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ par linéarité de la somme.

Les autres sont fausses dès que $n \geqslant 2$. Pour le voir, il suffit de prendre pour $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les familles constantes égales à 1.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+1) = \sum_{k=1}^{n} 3 = 3n$ et $2+\sum_{k=1}^{n} 1 = 2+n$. Or, si $n > 1$ alors $3n = 2n+n > 2+n$ donc l'égalité $a)$ est mise en défaut.

De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1\times 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = n\times n = n^2$. Or, si $n > 1$ alors $n^2 = n\times n > n$ donc l'égalité $d)$ est mise en défaut.

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = n^2$ donc, de même, $e)$ est mise en défaut dès que $n > 1$.

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 14^2$

$S_2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 104^2$

$S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{101}{102} + \dfrac{102}{103}$

$S_4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 13^2 + 15^2$

$S_5 = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + 97\times 99 + 98\times 100$

$S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512$

Solution

$$S_1 = \sum_{k=1}^{14} k^2 \qquad S_2 = \sum_{k=3}^{104} k^2 \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{102} \frac{k}{k+1}$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{7} (2k+1)^2 \qquad S_5 = \sum_{k=1}^{98} k(k+2) \qquad S_6 = \sum_{k=1}^{8} k^3$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2 \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} 7k \qquad S_3 = \sum_{k=5}^{11} k \qquad S_4 = \sum_{k=5}^{11} (3+5k)$$

Solution

$S_1 = 2(n+1)$

Par linéarité, $S_2 = 7\sum_{k=1}^{n} k = 7 \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_3 = \sum_{k=1}^{11} k - \sum_{k=1}^{4} k = \dfrac{11\times 12}{2} - \dfrac{4\times 5}{2} = 66 - 10 = 56.$

Par linéarité, $S_4 = \sum_{k=5}^{11} 3 + 5\sum_{k=5}^{11} k = 3(11-5+1) + 5S_3 = 21 + 5\times 56 = 301.$

Exercice 4. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} (2^k + k^2 + 2) \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$$

Solution

Par linéarité, $S_1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \times \dfrac{n(n+1)}{2} + n = n(n+1) + n = n(n+1+1) = n(n+2).$

Par linéarité,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{n(n+1)\times 2(n+2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2 = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n \\ &= 2 \times \frac{1-2^n}{-1} + \frac{n(n+1)(2n+1) + 12n}{6} \\ &= 2(-1+2^n) + \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1 + 12)}{6} \\ &= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{6} \end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\begin{aligned} S_4 &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n = n\left[(n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1\right] \\ &= n(2n^2 + n + 2n + 1 + 2n + 2 + 1) = n(2n^2 + 5n + 4) \end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{2^k} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

Solution

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^9 - 1}{2^9} = \frac{511}{512}$

En reconnaissant une somme téléscopique, $S_2 = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

De même, $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$

En multipliant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fraction $\dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ par l'expression conjuguée du dénominateur, il vient

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k}^2 - \sqrt{k+1}^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} \\
&= \sqrt{n+1} - 1
\end{aligned}$$