Feuille de calcul n°11 — Sommes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes familles de réels $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

$a)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$c)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2a_k = 2\sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

$e)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ $\qquad$ $f)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k - 2b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} b_k$

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 14^2$ $\qquad$ $S_4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 13^2 + 15^2$

$S_2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 104^2$ $\qquad$ $S_5 = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + 97\times 99 + 98\times 100$

$S_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{101}{102} + \dfrac{102}{103}$ $\qquad$ $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2 \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} 7k \qquad S_3 = \sum_{k=5}^{11} k \qquad S_4 = \sum_{k=5}^{11}(3+5k)$$

Exercice 4. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n}(2^k + k^2 + 2) \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$$

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes ou les exprimer en fonction de n.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{2^k} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$