♦ Corrigés des exercices du chapitre 9

Exercice 1. On se place dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants.

1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ **2.** $B = \{a, b, f, d\}$ **3.** $A \cup B$ **4.** $A \cap B$

5. $\overline{A} \cap B$ **6.** $C = \{a, b, c, d, a, e, d, f\}$ **7.** $\overline{A \cap \overline{C}}$.

Solution.

1. $\text{Card}(A) = 5$.

2. $\text{Card}(B) = 4$.

3. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} = E$ donc $\text{Card}(A \cup B) = 6$.

4. $A \cap B = \{a, b, d\}$ donc $\text{Card}(A \cap B) = 3$.

5. $\overline{A} \cap B = \{f\}$ donc $\text{Card}(\overline{A} \cap B) = 1$.

6. $C = \{a, b, c, d, e, f\} = E$ donc $\text{Card}(C) = 6$.

7. Par les lois de de Morgan, $\overline{A \cap \overline{C}} = \overline{A} \cup C = \{f\} \cup E = E$ donc $\text{Card}(\overline{A \cap \overline{C}}) = 6$.

Exercice 2. Dans un sac, on place 4 cartons portant respectivement les lettres R, I, R et E.

1. On tire successivement et sans remise les 4 cartons du sac.

- **a.** À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
- **b.** Les 4 cartons, dans l'ordre du tirage, forment un mot de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on ainsi former ?

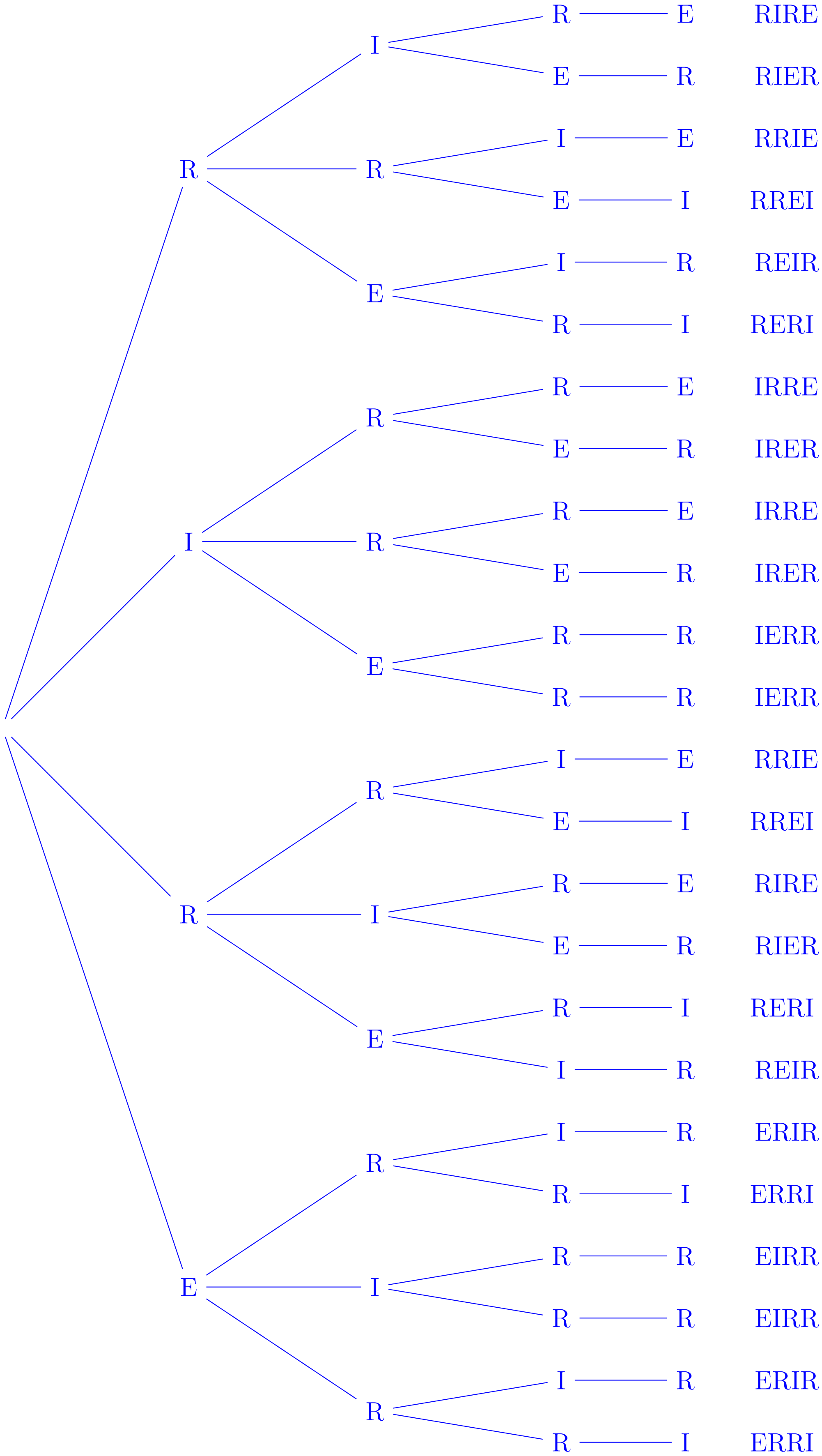
2. On tire successivement et avec remise 2 cartons du sac.

- **a.** À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
- **b.** Combien de tirages donnent un mot qui contient au moins une voyelle ?

Solution.

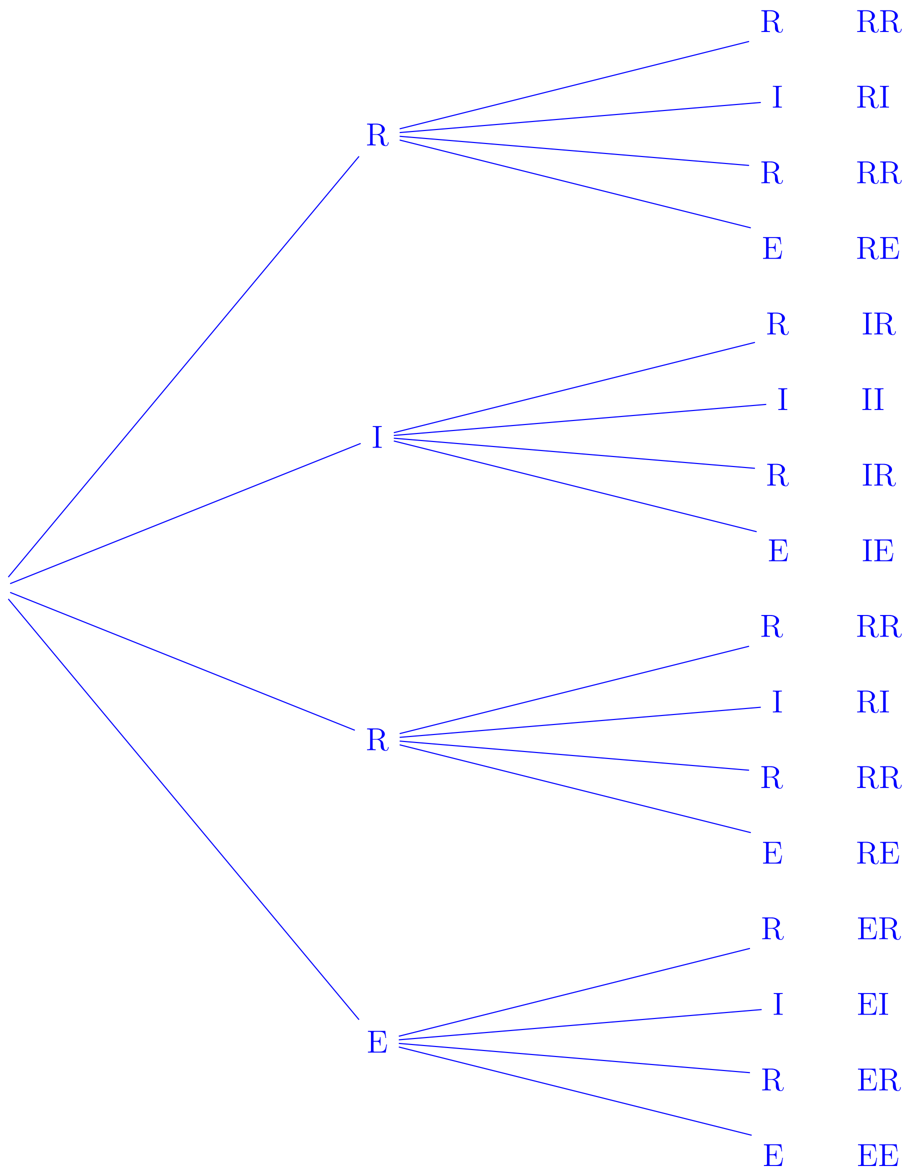
1. **a.** Voir page suivante.

- **b.** On peut former 12 mots différents : RIRE, RIER, RRIE, RREI, REIR, RERI, IRRE, IRER, IERR, ERIR, ERRI, EIRR



Il y a 24 tirages possibles.

2. a.



Il y a 16 tirages possibles.

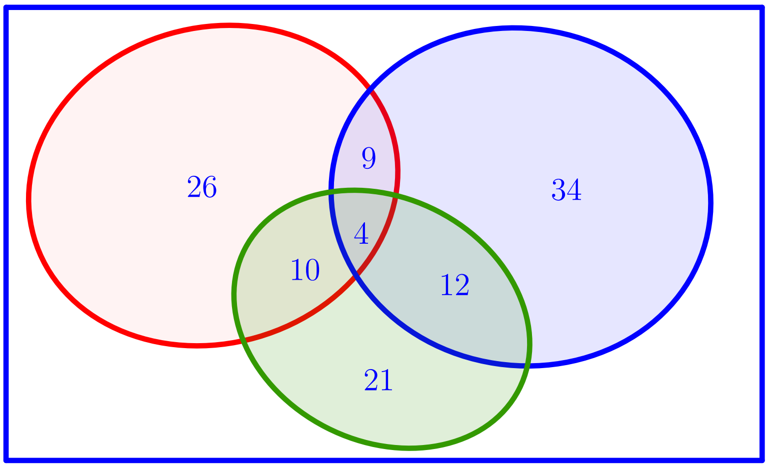
b. Il y a 12 tirages qui donnent un mot comportant au moins une voyelles : RI (2 fois), RE (2 fois), IR (2 fois), II, IE, ER (2 fois), EI et EE.

Exercice 3. Un club de jeux de société compte 120 adhérents. Parmi ceux-ci, 34 jouent uniquement au Scrabble, 21 uniquement au bridge et 26 uniquement au tarot. De plus, 10 membres jouent au bridge et au tarot mais pas au Scrabble, 9 jouent au tarot et au Scrabble mais pas bridge, 12 jouent au bridge et au Scrabble mais pas au tarot et 4 personnes jouent aux 3 jeux.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Déterminer le nombre de membres ne jouant ni au Scrabble, ni au bridge ni au tarot.
3. Déterminer le nombre de personnes qui jouent, entre autres, au Scrabble.

Solution.

1. On peut représenter la situation par le diagramme ci-dessous sur lequel sont représentés en rouge les joueurs de tarot, en bleu les joueurs de Scrabble et en vert les joueurs de bridge.



2. Le nombre total de membres jouant à au moins l'un des 3 jeux est $26 + 21 + 34 + 10 + 12 + 9 + 4 = 116$ donc le nombre de personnes qui ne jouent ni au Scrabble, ni au bridge, ni au tarot est $120 - 116 = 4$.
3. Le nombre de personnes qui jouent, entre autres, au Scrabble est $34 + 12 + 4 + 9 = 59$.

Exercice 4. Dans une entreprise, il y a 800 employés. On sait que 300 employés sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Solution. Ici, on peut faire deux tableaux : un pour les hommes et un pour les femmes :

	syndiqués	non syndiquées	Total
hommes mariés	144	22	166
hommes non mariés	44	90	134
Total hommes	188	112	300

	syndiqués	non syndiquées	Total
femmes mariées	$208 - 144 = 64$	194	$424 - 166 = 258$
femmess non mariées	100	142	242
Total femmes	$352 - 188 = 164$	336	500

On en déduit qu'il y a 142 femmes non mariées et non syndiquées.

Exercice 5.

1. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cap B) = 3$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$.
2. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cup B) = 8$. Déterminer le cardinal de $A \cap B$.

Solution.

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = 5 + 7 - 3 = 9$.

2. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ donc $8 = 5 + 7 - \text{Card}(A \cap B) = 12 - \text{Card}(A \cap B)$ et ainsi $\text{Card}(A \cap B) = 4$.

Exercice 6. Dans une association de 50 personnes, 27 sont inscrites aux activités culturelles, 22 sont inscrites aux activités sportives et 10 ne sont inscrites ni aux activités sportives ni aux activités culturelles.

Combien de personnes sont inscrites à la fois aux activités culturelles et aux activités culturelles ?

Solution. Notons A l'ensemble des membres de l'associatio, C l'ensemble des inscrits aux activités culturelles et S l'ensemble des inscrits aux activités sportives.

D'après l'énoncé, $\text{Card}(A) = 50$, $\text{Card}(C) = 27$, $\text{Card}(S) = 22$ et $\text{Card}(\overline{C} \cap \overline{S}) = 10$. Par les lois de de Morgan, $\overline{C} \cap \overline{S} = \overline{C \cup S}$ donc $\text{Card}(\overline{C \cup S}) = 10$ et ainsi $\text{Card}(C \cup S) = 50 - 10 = 40$. Or, $\text{Card}(C \cup S) = \text{Card}(C) + \text{Card}(S) - \text{Card}(C \cap S)$ donc $40 = 27 + 22 - \text{Card}(C \cap S) = 49 - \text{Card}(C \cap S)$. On conclut que $\text{Card}(C \cap S) = 9$ c'est-à-dire il y a 9 personnes qui sont inscrites aux activités culturelles et aux activités sportives.

Exercice 7. Combien de menus peut-on composer dans un restaurant qui propose à sa carte 5 entrées, 4 plats et 5 desserts ?

Solution. Par le principe multiplicatif, il y a $5 \times 4 \times 5 = 100$ menus possibles.

Exercice 8. Une personne a dans sa garde robe 6 chemises, 3 pantalons et 4 vestes. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution. Par le principe multiplicatif, cette personne a $6 \times 3 \times 4 = 72$ façons différentes de s'habiller.

Exercice 9. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution. Par le principe multiplicatif, il y a $4^{15} = 1\,073\,741\,824$ façons possibles de répondre à ce Q.C.M.

Exercice 10. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Solution. Le nombre total de poèmes que l'on peut composer est $10^{14} = 100\,000\,000\,000\,000$, soit cent mille milliards de poèmes possibles.

Exercice 11. En informatique, un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110, 00000000, 10101010 ou 11110000 sont des octets.

1. Déterminer le nombre d'octets différents.
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets contenant au moins un 0 ?

Solution.

1. Il y a $2^8 = 256$ octets différents.
2. Il y a $2^7 = 128$ octets commençants par 0.

3. Il y a un seul octet ne contenant par de 0 (il s'agit de 11111111) donc il y a $256 - 1 = 255$ octets contenant au moins un 0.

Exercice 12. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Quel est le nombre de parties de E ?
3. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les éléments de E ? (On ne demande pas que les mots formés aient un sens en français.)

Solution.

1. $\mathrm{Card}(E) = 7$.
2. Le nombre de parties de E est $2^7 = 128$.
3. Avec les lettres de E, on peut former $7^5 = 16\,807$ mots différents.

Exercice 13. Sachant qu'un numéro de téléphone portable est un numéro à 10 chiffres commençant par 06 ou 07, combien y a-t-il de numéros de téléphone portable différents contenant au moins un fois le chiffre 9 ?

Solution. Il y a 10^8 numéros commençant par 06 et autant commençant par 07 donc il y a $2 \times 10^8 = 200\,000\,000$ numéros de téléphone possibles. Parmi ceux-ci, de la même façon, il y en a $2 \times 9^8 = 86\,093\,442$ qui ne contiennent par le chiffre 9. On en déduit qu'il y a $200\,000\,000 - 86\,093\,442 = 113\,906\,558$ numéros de téléphones qui ne contiennent par le chiffre 9.

Exercice 14. Dans une association de 10 personnes, on doit désigner le bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Sachant qu'une personne ne peut pas cumuler plusieurs fonctions, combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Solution. Il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ bureaux possibles.

Exercice 15. Lors de la finale du 100 mètres aux jeux olympiques, il y a 8 coureurs au départ qui sont tous classés à l'arrivée.

Combien y a-t-il de classement possibles ?

Solution. Il y a $8! = 40\,320$ classements possibles.

Exercice 16. Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?

Solution.

1. Il y a $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$ podiums possibles.
2. Il y a $19 \times 18 = 342$ podium où Émile est premier.
3. Il y a $19 \times 18 \times 17 = 5\,814$ podiums dont Émile ne fait pas partie donc il y a $6\,840 - 5\,814 = 1\,026$ podiums dont Émile fait partie.

Exercice 17. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOSE ?

Solution. Il y a $5! = 120$ anagrammes du mot CHOSE.

Exercice 18. Lors d'une réunion, dix personnes doivent se répartir sur 10 chaises. Combien y a-t-il de répartitions différentes ?

Solution. Il y a $10! = 3\,628\,800$ répartitions possibles.

Exercice 19. On considère un damier de jeu de dames composé de 8×8 cases. On dispose de 3 jetons différents. De combien de façons peut-on disposer ces jetons sur le damier :

1. en supposant que deux jetons ne peuvent pas être disposés sur la même case ?
2. en supposons qu'on peut empiler plusieurs jetons sur la même case ?

Solution.

1. Si deux jetons ne peuvent pas être disposés sur le même case, il y a $64 \times 63 \times 62 = 249\,984$ possibilités.
2. Si plusieurs jetons peuvent être empilés sur le même case, il y a $64^3 = 262\,144$ possibilités.

Exercice 20. Le clavier d'un digicode à l'entrée d'un immeuble est composé des 10 chiffres de 0 à 9 et des deux lettres A et B. Le code de l'immeuble est composé d'une succession de 4 chiffres et d'une lettre (par exemple, 1945B, 0122B ou 3323A).

1. Combien y a-t-il de codes différents possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes comportant 4 chiffres différents ?

Solution.

1. Il y a $10^4 \times 2 = 20\,000$ codes possibles.
2. Il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 2 = 10\,080$ codes comportant 4 chiffres différents.

Exercice 21. Trois villages doivent être reliés à une des quatre antennes-relais du secteur.

1. Combien y a-t-il de liaisons possibles si plusieurs villages peuvent être reliés à la même antenne ?
2. Même question si les villages doivent tous être reliés à des antennes différentes.

Solution.

1. Si plusieurs villages peuvent-être reliés à un même antenne, il y a $4^3 = 64$ liaisons possibles.
2. Su les villages sont tous reliés à des antennes différentes, il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ liaisons possibles.

Exercice 22. Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes ?

Solution. Il y a $\binom{8}{2} \times \binom{10}{1} = \frac{8 \times 7}{2} \times 10 = 280$ échantillons qui comportent exactement 2 femmes et $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ donc il y a $280 + 56 = 336$ échantillons qui comportent au moins 2 femmes

Exercice 23. Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. Je peux distinguer toutes ces chaussures les unes des autres. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?

2. Combien y a-t-il de choix où j'obtiens deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de choix amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de choix amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?
5. Combien de choix amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire ?

Solution.

1. Il y a en tout $5 \times 2 + 3 \times 2 + 2 \times 2 = 20$ chaussures donc il y a $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$ choix possibles.
2. Il y a $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ choix qui donnent 2 chaussures noires, $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ choix qui donnent 2 chaussures marrons et $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ choix qui donnent 2 chaussures blanches. Par le principe additif, on en déduit qu'il y a $45 + 15 + 6 = 66$ choix qui donnent des chaussures de même couleur.
3. Il y a 10 pieds droits et 10 pied gauche donc il y a $\binom{10}{1} \times \binom{10}{1} = 10^2 = 100$ choix qui donnent deux pieds différents.
4. Il y a $5 + 3 + 2 = 10$ choix qui vont donner deux chaussures de la même paire donc il y a $190 - 10 = 180$ choix qui donnent deux chaussures qui ne sont pas de la même paire.

Exercice 24. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ;

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ;
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
3. contenant 2 carreaux et 3 piques ;
4. contenant au moins un roi ;
5. contenant au plus un roi ;
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Solution.

1. Il y a $\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 27!} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\,376$ tirages possibles.
2. Il y a $\binom{5}{8} \times 2 = \frac{8!}{5!3!} \times 2 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} \times 2 = 112$ tirages qui contiennent 5 carreaux ou 5 piques.
3. Il y a $\binom{5}{2} \times \binom{5}{3}$ tirages contenant 2 carreaux et 3 piques. Or, $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ donc il y a $10^2 = 100$ tirages qui donnent 2 carreaux et 3 piques.
4. Il y a $\binom{32-4}{5} = \binom{28}{5} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 23!} = 28 \times 27 \times 26 \times 5 = 98\,280$ tirages qui ne contiennent pas de roi. Il y a donc $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$ tirages qui contiennent au moins un roi.

5. On a vu dans la question précédente qu'il y a 98 280 tirages qui ne contiennent pas de roi. De plus, il y a $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$ tirages qui contiennent exactement 1 roi. Or, $\binom{4}{1} = 4$ et $\binom{28}{4} = \dfrac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 24!} = 7 \times 9 \times 12 \times 25 = 18\,900$ donc il a $4 \times 18\,900 = 75\,600$ tirages qui contiennent exactement 1 roi.
On conclut par le principe additif qu'il y a $98\,280 + 75\,600 = 173\,880$ tirages qui contiennent au plus un roi.
6. Ici, il faut distinguer selon que le tirage contient le roi de pique ou non.
S'il contient le roi de pique, il reste un roi à choisir parmi les 3 autres rois, 2 piques à choisir parmi les 7 autres piques ainsi qu'une dernière carte à choisir parmi les 21 qui ne sont ni des rois ni des piques. Cela laisse $3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1}$ choix. Or, $\binom{7}{2} \times \binom{21}{1} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ et $\binom{21}{1} = 21$ donc il y a $3 \times 21^2 = 1\,323$ choix.
S'il ne contient pas le roi de pique, il contient 2 rois choisis parmi les 3 autres rois et 3 piques choisis parmi les 7 autres piques. Cela laisse donc $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3}$ choix. Or, $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 3 \times \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 105$ donc il y a 105 choix.
Par le principe additif, on conclut qu'il y a $1\,323 + 105 = 1\,428$ tirages qui contiennent exactement 2 rois et 3 piques.

Exercice 25. Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de couleurs différentes ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de la même couleur ?
4. Combien y a-t-il de tirages qui donnent exactement 2 boules de la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de tirages qui ne contiennent pas de boules rouges ?

Solution.

1. Il y a $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$ tirages possibles.
2. Pour avoir 3 boules de couleurs différents, il faut choisir une boules blanches, 1 boule rouge et 1 boule noir, il y a donc $5 \times 3 \times 2 = 30$ tirages qui donnent 3 boules de couleurs différentes.
3. Pour avoir 3 boules de la même couleur, il faut tirer 3 boules blanches ou 3 boules rouges. Il y a $\binom{5}{3} \times \binom{3}{3} = \binom{5}{2} \times 1 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ tirages qui donnent 3 boules blanches et 1 seul tirage qui donnent 3 boules rouges donc, par le principe additif, il y a 11 tirages qui donnent 3 boules de la même couleur.
4. Dans un tirage, il y a soit 3 boules de couleurs différentes, soit exactement deux boules de couleurs différentes, soit 3 boules de la même couleur. Ainsi, d'après les questions précédentes, il y a $120 - 30 - 11 = 79$ tirages qui contiennent exactement 2 boules de la même couleur.
5. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ tirages qui ne contiennent pas de boules rouges.

Exercice 26. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

Solution. Pour déterminer une anagramme du mot ANAGRAMME, on peut :

- choisir la place des 3 A ; il y a $\binom{9}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 84$ choix ;
- choisir la place des 2 M parmi les 6 places restantes : il y a $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ choix ;
- choisir la place des 4 lettres distinctes restantes : il y a $4! = 24$ choix.

Ainsi, le nombre d'anagramme du mot ANAGRAMME est $84 \times 15 \times 24 = 30\,240$.

Exercice 27. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. **a.** Combien y a-t-il de codes possibles ?

b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

c. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

d. Combien y a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

2. Dans cette question, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

a. Combien y a-t-il de codes possibles ?

b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

c. Combien y a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Solution.

1. **a.** Il y a $9^3 = 729$ codes possibles.

b. Il y a $9^2 \times 4 = 324$ codes se terminant par un chiffre pair.

c. Il y a $8^3 = 512$ codes ne contenant pas le chiffre 4 donc il y a $729 - 512 = 217$ codes contenant au moins une fois le chiffre 4.

d. Pour déterminer un code contenant exactement une fois le chiffre 4, on peut choisir la place de 4 : il a 3 choix puis choisir les 2 autres chiffres : il a $8^2 = 64$ choix. Ainsi, il y a $3 \times 64 = 192$ codes contenant exactement une fois le chiffre 4.

2. **a.** Il y a $9 \times 8 \times 7 = 504$ codes possibles.

b. Pour déterminer un code se terminant par un chiffre pair, on peut choisir ce chiffre : il y a 4 choix puis choisir les 2 premiers chiffres (différents du dernier) : il y a 8×7 choix. Ainsi, il y a $4 \times 8 \times 7 = 224$ codes se terminant par un chiffre pair.

c. Il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ codes ne contenant pas le chiffre 6 donc il y a $504 - 336 = 168$ codes contant le chiffre 6.

Exercice 28. Le clavier d'un digicode comprend 13 touches : A, B, C, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un code est composé d'une lettre suivie de 4 chiffres (pas nécessairement distincts).

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas le chiffre 1 ?

3. Combien y a-t-il de codes contenant 4 chiffres distincts ?

4. Une personne est née en 1987. Elle a oublié le code mais elle sait que celui-ci commence par A et contient les 4 chiffres de son année de naissance. Combien d'essais au maximum devra-t-elle faire avant de retrouver le code ?

Solution.

1. Il y a 3 choix pour la lettre et 10^4 choix pour les 4 chiffres donc il y a $3 \times 10^4 = 30000$ codes possibles.
2. Il y a 3 choix pour la lettre et 9^4 choix pour les 4 chiffres donc il y a $3 \times 9^4 = 19683$ codes possibles ne contenant pas le chiffre 1.
3. Il y a 3 choix pour la lettre et $10 \times 9 \times 8 \times 7$ choix pour les 4 chiffres différents donc il y a $3 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 15120$ codes contenant 4 chiffres distincts.
4. La personne n'a pas le choix pour la lettre et elle sait que les lettres forment une permutation de $\{1, 9, 8, 7\}$. Ainsi, au maximum, la personne devra faire $4! = 24$ essais.

Exercice 29. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. l'ensemble A ;
2. l'ensemble B des nombres appartenant à A et ayant 7 chiffres différents ;
3. l'ensemble C des nombres pairs appartenant à A ;
4. l'ensemble D des nombres de A dont les chiffres sont ordonnés du plus petit au plus grand dans l'ordre dans lequel ils sont écrits.

Solution.

1. Un nombre à 7 chiffres commence par un chiffre différent de 0 donc il y a $\text{Card}(A) = 8 \times 9^6 = 4\,251\,528$.
2. De même, $\text{Card}(B) = 8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 322\,560$.
3. Un nombre est pair si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8 donc $\text{Card}(C) = 8 \times 9^5 \times 5 = 2\,361\,960$.
4. Pour déterminer un élément de D, il suffit de choisir les 7 chiffres qui le composent (car ensuite l'ordre est imposé : du plus grand au plus petit). De plus, ces 7 chiffres sont compris entre 2 et 9 car le premier chiffre ne peut être ni 0 ni 1. Ainsi, $\text{Card}(D) = \binom{8}{7} = 8$.

Exercice 30. Un motif est composé de 5 cases alignées côte à côte.

1. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de quatre couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois ?
2. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de six couleurs, une couleur n'étant jamais utilisée deux fois ?
3. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif en noir et blanc avec exactement trois cases blanches ?
4. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif à l'aide de trois couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois, de telle sorte que deux cases adjacentes ne soit pas de la même couleur ?

Solution.

1. Comme on dispose de 4 couleurs, il y aura exactement 2 cases de la même couleur. Pour déterminer un tel coloriage, on peut donc
   - choisir la couleur qui apparaît 2 fois : il y a 4 choix ;
   - choisir les deux cases de même couleur : il y a $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ choix ;

- choisir la place des 3 autres couleurs : il y a $3! = 6$ choix.

Ainsi, il y a $4 \times 10 \times 6 = 240$ coloriages possibles.

2. Il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ coloriages possibles.

3. Pour déterminer un tel coloriage, il suffit de choisir la place des trois cases blanches (les deux autres étant automatiquement noire) : il y a $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ coloriages possibles.

4. Pour déterminer un tel coloriage, on peut commencer par déterminer l'ordre dans lequel les trois couleurs apparaissent : il y a $3! = 6$ choix. Une fois qu'on a déterminé ces 3 couleurs c_1, c_2 et c_3, on distingue deux cas.

Si un couleur est utilisée 3 fois, ce ne peut être que c_1 et on a alors une seule possibilité pour le motif : $c_1c_2c_1c_3c_1$.

Sinon, deux couleurs sont utilisées deux fois. Dans ces cas, on a 6 motifs possibles : $c_1c_2c_1c_2c_3$, $c_1c_2c_1c_3c_2$, $c_1c_2c_3c_1c_2$, $c_1c_2c_3c_2c_1$, $c_1c_2c_3c_1c_3$, $c_1c_2c_3c_2c_3$.

On en déduit que le nombre total de coloriages est $6 \times (1 + 6) = 42$.

Exercice 31. Pour jouer au loto, on constitue une grille en cochant 5 premiers numéros différents choisis entre 1 et 49 puis en choisissant un numéro « chance » compris entre 1 et 10.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes ?

2. Pour un tirage du loto donné,

  a. combien y a-t-il de grilles qui ont le bon numéro « chance » ?

  b. combien y a-t-il de grilles qui ont les 5 bons premiers numéros ?

  c. combien y a-t-il de grilles qui ont exactement 4 bons numéros parmi les 5 premiers ?

Solution.

1. Il y a $\binom{49}{5} \times 10$ grilles possibles. Or, $\binom{49}{5} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 44!} = 49 \times 6 \times 47 \times 46 \times 3 = 1\,906\,884$ donc il y a $19\,068\,840$ grilles possibles.

2. Il y a $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$ grilles qui ont le bon numéro « chance ».

3. Il y a 10 grilles qui ont les 5 bons premiers numéros (la seule chose qui peut varier étant le numéro « chance »).

4. Pour déterminer une grille qui possède 4 bon numéros parmi les 5 premiers, on peut

- choisir les 4 bons numéros : il y a $\binom{5}{4} = 5$ choix possibles ;
- choisir un 5e numéro parmi les $49 - 5 = 44$ qui ne sont pas sortis : il y a 44 choix possibles ;
- choisir le numéro « chance » : il y a 10 choix possibles ;

Ainsi, il y a $5 \times 44 \times 10 = 2\,200$ grilles comportent exactement 4 bons numéros parmi les 5 premiers.

Exercice 32. Un domino est une pièce de bois séparée en deux parties. Chacune des deux parties porte un « numéro » entre 0 et 6 représenté par des points noirs (0 étant représenté par une partie sans point noir). Lorsque les deux « numéros » du domino sont identiques, on dit que ce domino est un « double ».

1. Déterminer le nombre de dominos différents.

2. Déterminer le nombre de dominos « double ».

3. On choisit deux dominos.

  a. Combien y a-t-il de choix possibles ?

  b. Combien de choix donnent deux dominos ayant un « numéro » en commun ?

Solution.

1. Un « double »] est entièrement déterminer par le numéro répété deux fois qu'il porte. Comme il y a 7 numéros possibles (de 0 à 6), il y a 7 « doubles » différents. Choisir un domino qui n'est pas un « double » revient à choisir 2 nombres différents sans ordre parmi les 7 possibles : il s'agit donc d'une combinaison. On en déduit qu'il y a $\binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 21$ dominos qui ne sont pas des « doubles ».Ainsi, il y a $7 + 21 = 28$ dominos différents.

2. On a vu qu'il y avait 7 dominos « double ».

3. **a.** Il y a $\binom{28}{2} = \dfrac{28 \times 27}{2} = 378$ tirages de deux dominos.

  b. Pour déterminer un tirage qui donne deux dominos ayant un numéro en commun, on peut :

  - choisir le numéro commun : il y a 7 choix ;
  - choisir les deux autres numéros (un par domino) : il y $\dbinom{7}{2} = 21$ choix.

  On en déduit qu'il y a $7 \times 21 = 147$ tirages qui donnent 2 dominos ayant un numéro commun.