⧫ Corrigés des exercices du chapitre 8

Exercice 1. Étudier la parité des fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^4-1}{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-\dfrac{1}{x^2} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & 2^n \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x^2+1) \end{array} \qquad j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2(x+1) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-3} \end{array}$$

Solution.

• L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est centré en 0 et, pour tout réel $x \neq 0$, $f(-x) = \frac{(-x)^4-1}{-x} = -\frac{x^4-1}{x} = -f(x)$ donc f est impaire.

• L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $g(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = g(x)$ donc g est paire.

• $h(1) = 2$ et $h(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$. Ainsi, h n'est ni paire ni impaire.

• L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $i(-x) = (-x)((-x)^2+1) = -x(x^2+1) = -i(x)$ donc f est impaire.

• $j(1) = 1^2(1+1) = 2$ et $j(-1) = (-1)^2(-1+1) = 0$ donc $j(-1) \neq j(1)$ et $j(-1) \neq -j(1)$. Ainsi, j n'est ni paire ni impaire.

• L'ensemble $[2\,;+\infty[$ n'est pas centré en 0 car $2 \in [2\,;+\infty[$ mais $-2 \notin [2\,;+\infty[$ donc k n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ est 4π-périodique et que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(2x) + |\sin(3x)|$ est π-périodique.

Solution.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x + 4\pi \in \mathbb{R}$ et

$$f(x+4\pi) = \sin\left(\frac{1}{2}(x+4\pi)+3\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi+3\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x+3\right) = f(x)$$

donc f est 4π-périodique.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x + \pi \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g(x+\pi) &= \cos(2(x+\pi)) + |\sin(3(x+\pi))| = \cos(2x+2\pi) + |\sin(3x+3\pi)| \\ &= \cos(2x) + |\sin(3x+\pi)| = \cos(2x) + |-\sin(3x)| \\ &= \cos(2x) + |\sin(3x)| = g(x) \end{aligned}$$

donc g est π-périodique.

Exercice 3. Montrer, en utilisant la définition, que la fonction $f : x \longmapsto 5x-3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $g : x \longmapsto 2-3x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution.

• Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme $5 > 0$, $5a < 5b$ donc $5a - 3 < 5b - 3$ c'est-à-dire $f(a) < f(b)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme $-3 < 0$, $-3a > -3b$ donc $2-3a > 2-3b$ c'est-à-dire $g(a) > g(b)$. Ainsi, g est strictement dé croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Donner un majorant et un minorant de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0\,;1]$ $g(x)=x(1-x)$ est bornée.

Solution.

1. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $1+x^2 \geqslant 1$. On en déduit, d'un part que $\frac{1}{1+x^2} \geqslant 0$ donc f est minorée par 0. De plus, comme $0<1 \leqslant 1+x^2$, $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc f est majorée par 1.
2. Soit $x \in [0\,;1]$. Alors, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$ et ainsi $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$. En multipliant membre à membre les inégalités portant sur des nombres positifs, on en déduit $0 \times 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1 \times 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Ainsi, g est bornée par 0 et 1.

Exercice 5. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)$.

1. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\sqrt{3}+1$.
2. En transformant l'expresion de f, montrer que f est bornée par -2 et par 2 et que ce sont les meilleures bornes possibles.

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant |f(x)| &= \left|\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)\right| \\ &\leqslant \left|\sqrt{3}\cos(x)\right| + |\sin(x)| \\ &\leqslant \sqrt{3}\,|\cos(x)| + |\sin(x)| \\ &\leqslant \sqrt{3}\times 1 + 1 = \sqrt{3}+1 \end{aligned}$$

donc f est bien majorée par $\sqrt{3}+1$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $A=\sqrt{3}$ et $B=-1$. On calculer $R=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^1}=2$ et on factorise :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right]$$

donc, pour tout réel x, $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Comme, pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$ et comme $2>0$, on en déduit que $-2 \leqslant 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2$ c'est-à-dire $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Ainsi, f est bien bornée par -2 et 2. De plus, $f(-\frac{\pi}{6}) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos(0) = 2$ donc on ne peut pas trouver de meilleur majorant que 2 et $f(\frac{5\pi}{6}) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos(\pi) = -2$ donc on ne peut pas trouver de meilleur minorant que -2.

Exercice 6. Soit un réel a.

1. Soit f une fonction croissante définie sur $[a\,;+\infty[$. Montrer que f est minorée sur $[a\,;+\infty[$.
2. Soit f une fonction décroissante définie sur $[a\,;+\infty[$. Montrer que f est majorée sur $[a\,;+\infty[$.

Solution.

1. Soit $x \in [a\,;+\infty[$. Alors, $a \leqslant x$ donc, comme f est croissante sur $[a\,;+\infty[$, $f(a) \leqslant f(x)$. Ainsi, f est minorée par $f(a)$ (qui est bien une constante indépendante de x).

2. Soit $x \in [a\,;+\infty[$. Alors, $a \leqslant x$ donc, comme f est décroissante sur $[a\,;+\infty[$, $f(a) \geqslant f(x)$. Ainsi, f est majorée par $f(a)$ (qui est bien une constante indépendante de x).

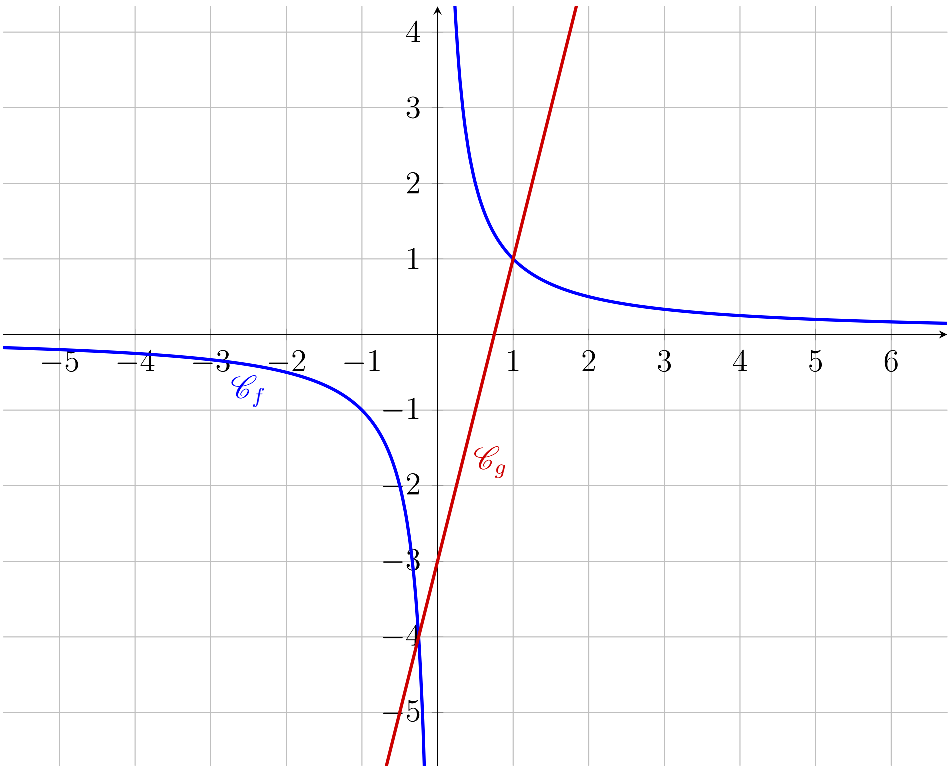
Exercice 7. On considère les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 4x - 3$.

1. Donner l'allure de leurs courbes représentatives dans un repère.

2. Étudier par le calcul les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Solution.

1.



2. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$d(x) := f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (4x - 3) = \frac{1 - x(4x-3)}{x} = \frac{-4x^2 + 3x + 1}{x}$$

Étudions le signe de $(4x^2 + 3x + 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 = 25 > 0$ donc l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-4)} = \frac{-8}{-8} = 1$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-4)} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$. Comme $a = -4 < 0$, on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-4x^2 + 3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty\,; -\frac{1}{4}\right] \cup \,]0\,;1]$ et en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $\left[-\frac{1}{4}\,;0\right[\cup [1\,;+\infty[$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1.
3. Montrer que f est majorée par 1.
4. Étudier les positions de relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite (D) d'équation $y = x - 1$.

Solution.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x,
$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$$
donc f est paire.
2. D'une part, on remarque que $f(0) = \frac{0^2-1}{0^2+1} = \frac{-1}{1} = -1$. D'autre part, pour tout réel x,
$$f(x) - (-1) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + 1 = \frac{x^2-1+(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1} \geqslant 0$$
donc $f(x) \geqslant -1$ c'est-à-dire $f(x) \geqslant f(0)$. Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1 et il est atteint en 0.
3. Pour tout réel x, $x^2 - 1 \leqslant x^2 + 1$ et $x^2 + 1 > 0$ donc $\frac{x^2-1}{x^2+1} \leqslant 1$ c'est-à-dire $f(x) \leqslant 1$. Ainsi, f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
4. Posons, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - (x-1)$. Ainsi, pour tout réel x,
$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{x^2-1}{x^2+1} - (x-1) = \frac{x^2-1-(x^2+1)(x-1)}{x^2+1} = \frac{x^2-1-x^3+x^2-x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{-x^3+2x^2-x}{x^2+1} = \frac{-x(x^2-2x+1)}{x^2+1} = \frac{-x(x-1)^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$
Or, pour tout réel x, $(x-1)^2 geqslant 0$ et $x^2+1>0$ donc le signe de $d(x)$ est le signe de $-x$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty\,;0]$ et en dessous de (D) sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 9. Sans le calculer, comparer dans chacun des cas suivants, A et B.

$A = 1{,}0001^2$ et $B = 1{,}00001^2$	$A = 0{,}03^3$ et $B = 0{,}02^3$	$A = (-199{,}9)^2$ et $B = (-200)^2$
$A = (-199{,}9)^5$ et $B = (-200)^5$	$A = (3-\pi)^6$ et $B = (-0{,}2)^6$	$A = \dfrac{1}{2{,}01}$ et $B = \dfrac{1}{2}$
$A = \dfrac{1}{3{,}9^5}$ et $B = \dfrac{1}{4^5}$	$A = \dfrac{1}{(-6{,}1)^4}$ et $B = \dfrac{1}{(-6)^4}$	$A = \dfrac{1}{5}$ et $B = \dfrac{1}{-3}$

Solution.

Comme $1{,}0001 > 1{,}000001 > 0$ et comme la fonction carré est strictemrnt croissante sur $[0\,;+\infty[$, $1{,}0001^2 > 1{,}00001^2$.

Comme $0{,}03 > 0{,}02$ et comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $0{,}03^3 > 0{,}02^3$.

Comme $0 > -199, > -200$ et comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, $(-199{,}9)^2 < (-200)^2$.

Comme $-199, > -200$ et comme la fonction puissance 5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $(-199{,}9)^5 > (-200)^5$.

Comme $3-\pi \approx -0{,}14$, $0 > 3-\pi > -0{,}2$ donc, comme la fonction puissance est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, $(3-\pi)^6 < (-0{,}2)^6$.

Comme $2{,}01 > 2 > 0$ et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2{,}01} < \frac{1}{2}$.

Comme $0 < 3{,}9 < 4$ et comme la fonction puissance -5 est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{3{,}9^5} > \frac{1}{4^5}$.

Comme $-6{,}1 < -6 < 0$ et comme la fonction puissance -4 est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$, $\frac{1}{(-6{,}1)^4} < \frac{1}{(6)^4}$.

Comme $\frac{1}{5} > 0$ et comme $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{-3}$.

Exercice 10. Sans le calculer, comparer dans chacun des cas suivants, A et B.

$A = \sqrt{2}$ et $B = \sqrt{3}$ $\quad$ $A = 2\sqrt{3}$ et $B = 3\sqrt{2}$ $\quad$ $A = \sqrt{101}$ et $B = 10$ $\quad$ $A = 9$ et $B = 4\sqrt{5}$

Solution.

Comme $2 < 3$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

On remarque que $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{18}$ et $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$. Or, $12 < 18$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ c'est-à-à-dire $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Comme $100 < 101$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{100} < \sqrt{101}$ c'est-à-dire $10 < \sqrt{101}$.

On remarque que $9 = \sqrt{81}$ et $4\sqrt{5} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{80}$. Or, $80 < 81$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{80} < \sqrt{81}$ c'est-à-à-dire $4\sqrt{5} < 9$.

Exercice 11. Écrire chacune des fonctions homographiques suivantes sous forme réduite et en déduire leurs variations.

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-2} \qquad g : x \longmapsto \frac{3x}{5-x} \qquad h : x \longmapsto \frac{1-x}{1+2x}$$

Solution.

Pour tout $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

Ici, $\beta = 3 > 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

Pour tout $x \neq 5$,

$$g(x) = \frac{-3(5-x)+15}{5-x} = \frac{-3(5-x)}{5-x} + \frac{15}{5-x} = -3 + \frac{15}{5-x} = -3 + \frac{-15}{x-5}.$$

Ici, $\beta = -15 < 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]5\,;+\infty[$.

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$,

$$h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1-x}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{-(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{-(x+\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} \times \left[-1 + \frac{\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right]$$

donc

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{x-(-\frac{1}{2})}.$$

Ici, $\beta = \frac{3}{4} > 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 12. On souhaite comparer, sans les calculer, les deux nombres

$$A = \frac{0{,}99999999}{1{,}99999999} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{0{,}99999998}{1{,}99999998}.$$

Pour cela, on considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2. Écrire f sous forme réduite et en déduire ses variations.

3. Déterminer deux réels$a$ et b tels que $A = f(a)$ et $B = f(b)$.

4. Conclure.

Solution.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{-1}{x-(-1)}$. Ainsi, $\beta = -1 < 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

3. $A = \frac{0{,}99999999}{0{,}99999999+1} = f(0{,}99999999)$ et $B = \frac{0{,}00000008}{0{,}99999998+1} = f(0{,}99999998)$.

4. Comme f est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$, $f(0{,}99999999) > f(0{,}99999998)$ donc $A > B$.

Exercice 13. Un automobiliste effectue un trajet aller-retour Montargis-Paris. Sa vitesse moyenne à l'aller est 100 km.h^{-1}.

1. On suppose dans cette question que la vitesse moyenne au retour est 80 km.h^{-1}.

- **a.** On note d la distance Montargis-Paris en km. Exprimer en fonction de d le temps mis par l'automobiliste pour faire le retour.
- **b.** En déduire, en fonction de d, le temps mis par l'automobiliste pour faire l'aller-retour.
- **c.** En déduire sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour.

2. On note maintenant x la vitesse moyenne au retour, et $V(x)$ la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour, toutes les deux exprimées en km.h^{-1}.

- **a.** Le temps que met l'automobiliste pour faire l'aller a-t-il changé ?
- **b.** Exprimer, en fonction de d et x, le temps mis par l'automobiliste pour faire le retour.
- **c.** En déduire que $V(x) = \dfrac{200x}{x+100}$.
- **d.** À quelle famille de fonctions V appartient-elle ?
  Montrer que la forme réduite de V est $V(x) = 200 - \dfrac{20000}{x+100}$.
- **e.** Pour quelle vitesse au retour la vitesse moyenne sur l'aller-retour est-elle 90 km.h^{-1} ?
- **f.** Est-il possible d'effectuer l'aller-retour à une vitesse moyenne de 200 km.h^{-1} ?
- **g.** Déterminer un majorant de la vitesse moyenne aller-retour.

Solution.

1. **a.** La temps, en h, du trajet retour est $\frac{d}{80}$.

b. Le temps, en h, du trajet aller-retour est $\frac{d}{100} + \frac{d}{80}$.

c. La vitesse moyenne, en km.h^{-1} est

$$\frac{2d}{\frac{d}{100} + \frac{d}{80}} = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{80}\right)} = \frac{2}{\frac{8+10}{800}} = 2 \times \frac{800}{18} = \frac{800}{9} \approx 88{,}9.$$

2. **a.** L'énoncé n'indique pas de changement sur la vitesse à l'aller donc on considère qu'elle est toujours le même.

b. La temps, en h, de trajet retour est $\frac{d}{x}$.

c. Le temps, en h, du trajet aller-retour est $\frac{d}{100}+\frac{d}{x}$. On en déduit que

$$V(x)=\frac{2d}{\frac{d}{100}+\frac{d}{x}}=\frac{2d}{d\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2}{\frac{x+100}{100x}}=2\times\frac{100x}{x+100}=\frac{200x}{x+100}.$$

d. La fonction V est une fonction homographique. De plus,

$$V(x)=\frac{200(x+100)-20\,000}{x+100}=\frac{200(x+100)}{x+100}-\frac{20\,000}{x+100}=200-\frac{20\,000}{x+100}$$

e. On chercher x tel que $V(x)=90$. Or,

$$V(x)=90\iff 200x=90(x+100)\iff 200x=90x+9\,000$$
$$\iff 110x=9\,000\iff x=\frac{9\,000}{110}=\frac{900}{11}$$

Ainsi, pour que la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour soit 90 km.h^{-1}, il faut que la vitesse moyenne sur le trajet retour soit environ 81,8 km.h^{-1}.

f. En utilisant la forme réduite,

$$V(x)=200\iff 200-\frac{20\,000}{x+100}=200\iff -\frac{20\,000}{x+100}=0\iff -20\,000=0.$$

Cette équation n'a pas de solution donc la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour ne peut pas être égale à 200 km.h^{-1}.

g. Comme $x>0$, $\frac{20\,000}{x+100}>0$ donc $V(x)<200$. Ainsi, la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour est majorée par 200 km.h^{-1}.

Exercice 14. Soit x un nombre réel. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme e^{y} avec y le plus simple possible :

a) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-x}$; b) $\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x}$; c) $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$; d) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}}$.

Solution

a) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{3x-x}=\mathrm{e}^{2x}$;

b) $\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{1-x}$;

c) $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2=\mathrm{e}^{-2x}$;

d) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}}=\mathrm{e}^{2x-(2-x)}=\mathrm{e}^{3x-2}$.

Exercice 15. Soit x un nombre réel. Démontrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Solution. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)\times\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Exercice 16. Factoriser, pour tout réel x,

$A=10\mathrm{e}^{x}-5x\mathrm{e}^{x}$ $\quad B=2x\mathrm{e}^{-x}+3\mathrm{e}^{-x}$ $\quad C=\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}$ $\quad D=-3x\mathrm{e}^{0,4x}-2\mathrm{e}^{0,4x}$

$E=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}+1$ $\quad F=9\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+1$ $\quad G=\mathrm{e}^{2x}-16$ $\quad H=\mathrm{e}^{6x}-25$

Solution.
$A = 10\mathrm{e}^{x} - 5x\mathrm{e}^{x} = 2 \times 5\mathrm{e}^{x} - x \times 5\mathrm{e}^{x} = 5\mathrm{e}^{x}(2 - x)$
$B = 2x\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x + 3)$
$C = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} - 4\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 4)$
$D = -3x\mathrm{e}^{0,4x} - 2\mathrm{e}^{0,4x} = \mathrm{e}^{0,4x}(-3x - 2)$
$E = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} + 1 = (\mathrm{e}^{x})^2 + 2 \times \mathrm{e}^{x} \times 1 + 1^2 = (\mathrm{e}^{x} + 1)^2$
$F = 9\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x} + 1 = (3\mathrm{e}^{x})^2 - 2 \times (3\mathrm{e}^{x}) \times 1 + 1^2 = (3\mathrm{e}^{x} - 1)^2$
$G = \mathrm{e}^{2x} - 16 = (\mathrm{e}^{x})^2 - 4^2 = (\mathrm{e}^{x} - 4)(\mathrm{e}^{x} + 4)$
$H = \mathrm{e}^{6x} - 25 = (\mathrm{e}^{3x})^2 - 5^2 = (\mathrm{e}^{3x} - 5)(\mathrm{e}^{3x} + 5)$

Exercice 17. Dans chaque cas, comparer A et B :

$A = \mathrm{e}^2$ et $B = \mathrm{e}^{5,6}$ $\qquad$ $A = \mathrm{e}^{-1,3}$ et $B = \mathrm{e}^{-8}$ $\qquad$ $A = \mathrm{e}^{0,1}$ et $B = \mathrm{e}^{-10}$ $\qquad$ $A = e$ et $B = \mathrm{e}^{2,7}$.

Solution.
Comme $2 < 5{,}6$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^2 < \mathrm{e}^{5,6}$.
Comme $-1{,}3 > -8$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-1,3} > \mathrm{e}^{-8}$.
Comme $0{,}1 > -10$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{0,1} > \mathrm{e}^{-10}$.
Comme $1 < 2{,}7$, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e = \mathrm{e}^1 < \mathrm{e}^{2,7}$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. (E_1) $\mathrm{e}^{3x} = 0$ $\qquad$ **2.** (E_2) $\mathrm{e}^{2x} = 1$ $\qquad$ **3.** (E_3) $\mathrm{e}^{-3x+6} = e$
4. (E_4) $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$ $\qquad$ **5.** (E_5) $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$ $\qquad$ **6.** (I_1) $\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3}$
7. (I_2) $\mathrm{e}^{7x-1} \geqslant \mathrm{e}^{3x}$ $\qquad$ **8.** (I_3) $\mathrm{e}^{x} = \dfrac{1}{\exp(x^2)}$ $\qquad$ **9.** (I_4) $\mathrm{e}^{x} \leqslant \mathrm{e}^{2-x^2}$.

Solution.

1. Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{3x} > 0$ donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{3x} = 0$ est $\varnothing$.

2. Pour tout réel x, on a
$$\mathrm{e}^{2x} = 1 \iff \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^0 \iff 2x = 0 \iff 0.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x} = 0$ est $\{0\}$.

3. Pour tout réel x, on a
$$\mathrm{e}^{-3x+6} = e \iff \mathrm{e}^{-3x+6} = \mathrm{e}^1 \iff -3x + 6 = 1 \iff x = \frac{5}{3}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^{-3x+6} = e$ est $\{\frac{5}{3}\}$.

4. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1} \iff 4x = 5x - 1 \iff 1 = x$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$ est $\{1\}$.

5. Par propriété de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36} \iff 4x^2 = 36 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \text{ ou } x = 3.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$ est $\{-3\,;3\}$.

6. Par propriété de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3} \iff -5x < 6x+3 \iff -3 < 11x \iff x > \frac{-3}{11}$$

donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3}$ est $\left]-\frac{3}{11}\,;+\infty\right[$.

7. Par propriété de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{e}^{7x-1} \geqslant \mathrm{e}^{3x} \iff 7x-1 \geqslant 3x \iff 4x \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{4}$$

donc l'ensemble des solutions de $\mathrm{e}^{7x-1} \geqslant \mathrm{e}^{3x}$ est $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

8.

$$(\mathrm{E}) \iff \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-x^2} \iff x = -x^2 \iff x+x^2 = 0 \iff x(1+x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{-1\ ;\ 0\}$.

9. Par croissance de la fonction exponentielle,

$$(\mathrm{I}) \iff x \leqslant 2 - x^2 \iff x^2 + x - 2 \leqslant 0.$$

Or, le discriminant de x^2+x-2 est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$ donc l'équation $x^2+x-2=0$ admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Comme $a = 1 > 0$, x^2+x-2 est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre. On en déduit que l'ensemble des solutions de (I) est $[-2\,;1]$.

Exercice 19. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:

a) $\ln(27)$; b) $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$; c) $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$.

Solution.
a) $\ln 27 = \ln(3^3)$ donc $\ln(27) = 3\ln(3)$.
b) $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(9) = -\ln(3^2)$ donc $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -2\ln(3)$.
c) $\ln\left(9\sqrt{3}\right) = \ln(9) + \ln(\sqrt{3}) = \ln(3^2) + \frac{1}{2}\ln(3) = 2\ln(3) + \dfrac{1}{2}\ln(3)$ donc $\ln\left(9\sqrt{3}\right) = \dfrac{5}{2}\ln(3)$.

Exercice 20. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

a) $A = \ln\left(e^4\right)$; b) $B = \mathrm{e}^{\ln(3)}$; c) $C = \dfrac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2}$;

d) $D = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$.

Solution.
a) $A = \ln\left(e^4\right)$ donc, par définition, $A = 4$.
b) $B = \mathrm{e}^{\ln 3}$ donc, par définition, $B = 3$.
c) $C = \dfrac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2} = \dfrac{\ln\left[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\right]}{2} = \dfrac{\ln(5-1)}{2} = \dfrac{\ln(4)}{2} = \dfrac{\ln(2^2)}{2} = \dfrac{2\ln(2)}{2}$ donc $C = \ln(2)$.
d) $D = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\dfrac{98}{99}\right)+\ln\left(\dfrac{99}{100}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\ldots\times\dfrac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\times\dfrac{\cancel{99}}{100}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{100}\right)$ soit $D = -\ln 100$.

Exercice 21. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \ln(x) = 3 \qquad (E_2) : \ln(x+1) = 0 \qquad (E_3) : \mathrm{e}^{x+3} = 4$$
$$(E_4) : \ln(x^2) = \ln(x)^2 \qquad (E_5) : \ln(x^2-2) = \ln(x) \qquad (I_1) : \ln(x+2) < 5$$
$$(I_2) : \ln(x+3) + \ln(x-2) > \ln(x+10) \qquad (I_3) : (\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0.$$

Solution.

• (E_1) a un sens si et seulement si $x > 0$ et, pour tout $x > 0$, (E_1) équivaut à $x = \mathrm{e}^3$. L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\{\mathrm{e}^3\}$.

• (E_2) a un sens si et seulement si $x > -1$ et, pour tout $x > -1$,

$$(E_2) \iff x+1 = 1 \iff x = 0.$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\{0\}$.

• Pour tout réel x,

$$(E_3) \iff x+3 = \ln(4) \iff x = \ln(4) - 3.$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $\{\ln(4) - 3\}$.

• (E_4) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $x^2 > 0$ i.e. $x > 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff 2\ln(x) = \ln(x)^2 \iff \ln(x)^2 - 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x)\,[\ln(x) - 2] = 0\\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) - 2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } \ln(x) = 2 \iff x = 1 \text{ ou } x = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (E_4) est $\{1\,;\mathrm{e}^2\}$.

• (E_5) a un sens si et seulement si $x^2 - 2 > 0$ et $x > 0$. Or, $x^2 - 2 > 0$ si et seulement si $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$. Ainsi, (E_2) a un sens si et seulement si $x > \sqrt{2}$ et, pour tout $x > \sqrt{2}$,

$$(E_5) \iff x^2 - 2 = x \iff x^2 - x - 2 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ a deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 < \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 > \sqrt{2}$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions de (E_5) est $\{2\}$.

• (I_1) a un sens si et seulement si $x > -2$ et, pour tout $x > -2$,

$$(I_1) \iff x+2 < \mathrm{e}^5 \iff x < \mathrm{e}^5 - 2.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-2\,;\mathrm{e}^5 - 2[$.

• L'inéquation (I_2) a un sens si et seulement si $x+3 > 0$, $x-2 > 0$ et $x+10 > 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x > 2$.

De plus, pour tout $x > 2$,

$$(\mathrm{I}_2) \iff \ln[(x+3)(x-2)] > \ln(x+10) \iff (x+3)(x-2) > x+10 \iff x^2 - 16 > 0 \iff x > 4 \text{ ou } x < -4.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_2) est $]4\,;+\infty[$.

• Pour tout $x > 0$, posons $X = \ln x$. Alors, (I_3) se réécrit $X^2 - 5X + 6 > 0$. Le discriminant de $X^2 - 5X + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 6 = 1 > 0$ donc l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ a deux racines réelles qui sont $X_1 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1} = 3$ et $X_2 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$. Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $X^2 - 5X + 6 > 0$ si et seulement si $X \in\,]-\infty\,;2[\,\cup\,]3\,;+\infty[$. Il s'ensuit que, pour tout $x > 0$,

$$(I_3) \iff \ln x < 2 \text{ ou } \ln x > 3 \iff x < \mathrm{e}^2 \text{ ou } x > \mathrm{e}^3.$$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des solutions de (I_3) est $]0\,;\mathrm{e}^2[\,\cup\,]\mathrm{e}^3\,;+\infty[$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation (I) : $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2017}$.

Solution. En utilisant la croissance de ln et le fait que $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$, on peut écrire :

$$(I_1) \iff \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant \ln\left(10^{-2017}\right) \iff n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant -2017\ln(10) \iff n \geqslant \frac{-2017\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Or, $\dfrac{-2017\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4227{,}4$ donc l'ensemble des solutions de (I_1) dans $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 4228.

Exercice 23. Tant qu'un organisme est vivant, il échange du carbone avec son environnement, de sorte qu'on peut considérer que sa concentration en carbone 14 (par rapport à la quantité totale de carbone) est constante, égale à $C_0 \approx 10^{-12}$.

À partir de sa mort, le carbone 14 qu'il contient se désintègre et sa concentration décroît exponentiellement : la concentration t années après la mort de l'organisme est donnée par :

$$(E)\ C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$$

où $\lambda > 0$ est une constante.

1. Soit τ le temps de demi-vie du carbone 14, c'est-à-dire le temps après lequel la moitié des noyaux se sont désintégrés. Déterminer la valeur de $C(\tau)$.
2. Vérifier que
$$\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau}.$$
3. En déduire, en remplaçant λ par son expression dans (E) que pour tout $t \geqslant 0$,
$$(E_2)\ C(t) = C_0 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$
4. Démontrer que l'âge d'un échantillon est donné par
$$t = \frac{\tau}{\ln(2)} \ln\left(\frac{C_0}{C(t)}\right).$$
5. L'homme de Piltdown, découvert en 1908, était présenté par certains comme un chaînon manquant entre le singe et Homo sapiens. Un échantillon de la mâchoire présente une concentration $C \approx 9{,}7 \times 10^{-13}$. Sachant que le temps de demi-vie du carbone 14 est donné par $\tau = 5\,568$ ans, dater l'échantillon et commenter.

Solution.

1. Par définition, $C(\tau) = \frac{C_0}{2}$.
2. Ainsi, on a $C_0 \mathrm{e}^{-\lambda\tau} = \frac{C_0}{2}$ donc, comme $C_0 \neq 0$, $\mathrm{e}^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$. Dès lors, $-\lambda\tau = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$ donc $\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau}$.
3. On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$C(t) = C_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{\tau}t} = C_0\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{-\frac{t}{\tau}} = C_0 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$

4. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$C(t) = C_0 2^{-\frac{t}{\tau}} \iff \frac{C(t)}{C_0} = 2^{-\frac{t}{\tau}} \iff \ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) = -\frac{t}{\tau}\ln(2)$$
$$\iff t = -\frac{\tau}{\ln(2)}\ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) \iff t = \frac{\tau}{\ln(2)}\ln\left(\frac{C_0}{C(t)}\right)$$

Ainsi, on a bien $t = \frac{\tau}{\ln(2)}\ln\left(\frac{C_0}{C(t)}\right)$.

5. D'après 5., $t \approx \frac{5\,568}{\ln(2)}\ln\left(\frac{10^{-12}}{9{,}7\cdot 10^{-13}}\right) \approx 250$ années donc l'homme de Piltdown est moderne. Il s'agissait en fait d'une supercherie (le crâne et la mandibule n'appartenant même pas au même squelette).

Exercice 24. Soit un réel $\omega > 0$. Déterminer, à l'aide des fonctions sin et cos, une f fonction définie sur $\mathbb{R}$, ω-périodique et telle que $f(0) = 1$ et $f(\frac{\omega}{4}) = 1$.

Solution. On peut chercher f sous la forme $f : x \longmapsto A\cos(\frac{2\pi}{\omega}x) + B\sin(\frac{2\pi}{\omega}x)$. En effet, une telle fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x+\omega) &= A\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}(x+\omega)\right) + B\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}(x+\omega)\right) \\ &= A\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}x + 2\pi\right) + B\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}x + 2\pi\right) \\ &= A\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}x\right) + B\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}x\right) = f(x) \end{aligned}$$

donc f st bien ω-périodique. On cherche maintenant A et B tels que $A\cos(0) + B\sin(0) = 1$ ce qui donne $A = 1$ et $A\cos(\frac{\pi}{2}) + B\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ce qui donne $B = 1$. Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto \cos(\frac{2\pi}{\omega}x) + \sin(\frac{2\pi}{\omega}x)$ convient.

Exercice 25. On définit la fonction cotangente, notée cotan, par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de cotan.
2. Montrer que cotan est impair et π-périodique.
3. A-t-on, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$?

Solution.

1. Pour tout réel x, $\operatorname{cotan}(x)$ existe si et seulement si $\sin(x) \neq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 0\ [\pi]$. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Pour tout $x \neq 0\ [\pi]$, $-x \neq 0\ [\pi]$ et

$$\operatorname{cotan}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\operatorname{cotan}(x)$$

donc cotan est impaire.
De plus, pour tout $x \neq 0\ [\pi]$, $x + \pi \neq 0\ [\pi]$ et

$$\operatorname{cotan}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \operatorname{cotan}(x)$$

donc cotan est π-périodique.

3. La fonction cotan est définie en $\frac{\pi}{2}$ alors que la fonction $\frac{1}{\tan}$ ne l'est pas donc les deux fonctions ne peuvent pas coïncider sur $\mathcal{D}$.