⧫ Corrigés des exercices du chapitre 7

Exercice 1. Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}5x - y = 8\\ -3x + 2y = 12\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}2x + y = -10\\ -1{,}5x + 2y = 13\end{cases}$$

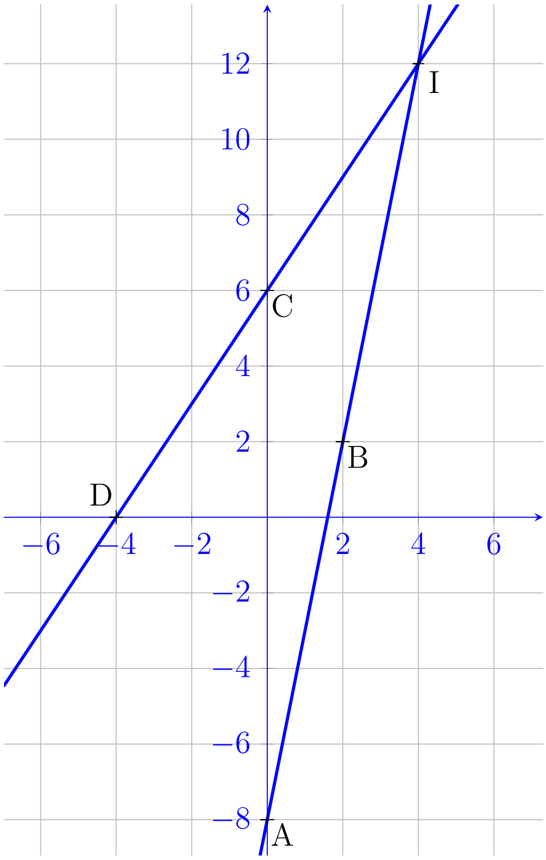
Solution.

Pour (S_1), considérons les droites $d : 5x - y = 8$ et $d' : -3x + 2y = 12$.

Déterminons deux points de d : pour $x = 0$, on trouve $y = -8$ et, pour $x = 2$, on trouve $y = 2$ donc les points $\mathrm{A}(0\,;-8)$ et $\mathrm{B}(2\,;2)$ appartiennent à d.

Déterminons deux points de d' : pour $x = 0$, on trouve $y = 6$ et, pour $y = 0$, on trouve $x = -4$ donc les points $\mathrm{C}(0\,;6)$ et $\mathrm{D}(-4\,;0)$ appartiennent à d'.

On peut donc tracer d et d' :



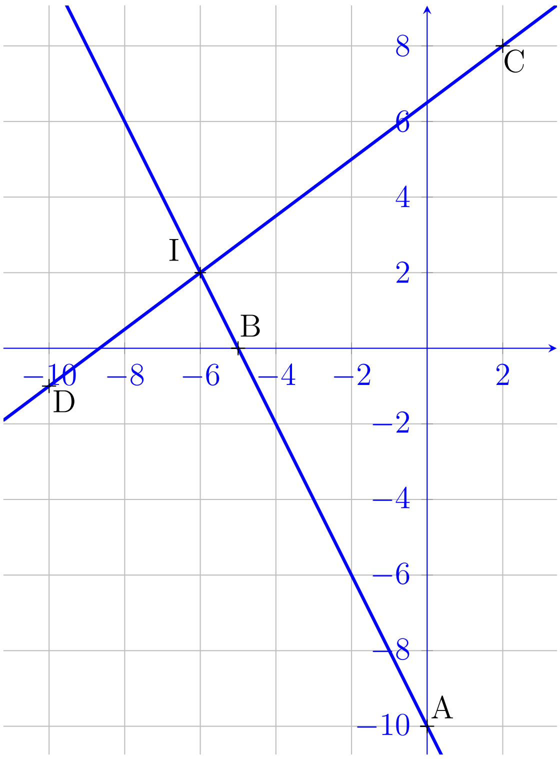
Graphiquement, les coordonnées du point d'intersection I de d et d' sont $(4\,;12)$. Ainsi, on conclut que, graphiquement, l'unique solution du système est $(4\,;12)$.

Pour (S_2), considérons les droites $d : 2x + y = -10$ et $d' : -1{,}5x + 2y = 13$.

Déterminons deux points de d : pour $x = 0$, on trouve $y = -10$ et, pour $y = 0$, on trouve $x = -5$ donc les points $\mathrm{A}(0\,;-10)$ et $\mathrm{B}(-5\,;0)$ appartiennent à d.

Déterminons deux points de d' : pour $x = 2$, on trouve $y = 8$ et, pour $y = -1$, on trouve $x = -10$ donc les points $\mathrm{C}(2\,;8)$ et $\mathrm{D}(-10\,;-1)$ appartiennent à d'.

On peut donc tracer d et d' :



Graphiquement, les coordonnées du point d'intersection I de d et d' sont $(-6\,;2)$. Ainsi, on conclut que, graphiquement, l'unique solution du système est $(-6\,;2)$.

Exercice 2. Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode qui vous semble la plus adaptée.

$$(S_1)\begin{cases}x-3y=6\\y=2\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases}4x-2y=3\\x=3\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases}x+y=4\\x-y=-5\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases}3x+4y=1\\2x+3y=0\end{cases}\qquad (S_5)\begin{cases}2x+y=1\\6x+3y=9\end{cases}\qquad (S_6)\begin{cases}x+y=1\\-3x-3y=-3\end{cases}$$

Solution.

$$(S_1)\iff\begin{cases}x-3\times 2=6\\y=2\end{cases}\iff\begin{cases}x-6=6\\y=2\end{cases}\iff\begin{cases}x=12\\y=2\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_1) est $(12\,;2)$.

$$(S_2)\iff\begin{cases}4\times 3-2y=3\\x=3\end{cases}\iff\begin{cases}-2y=3-12\\x=3\end{cases}\iff\begin{cases}4\times y=\frac{9}{2}\\x=3\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_2) est $\left(3\,;\frac{9}{2}\right)$.

$$(S_3)\iff\begin{cases}2x=-1 & L_1\leftarrow L_1+L_2\\2y=9 & L_2\leftarrow L_1-L_2\end{cases}\iff\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{9}{2}\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_3) est $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$.

$$(S_4)\iff\begin{cases}x=3 & L_1\leftarrow 3L_1-4L_2\\-y=2 & L_2\leftarrow 2L_1-3L_2\end{cases}\iff\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$$

donc l'unique solution de (S_3) est $(3\,;-2)$.

$$(S_5) \iff \begin{cases} 0=-6 & L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ 6x+3y=9 \end{cases}$$

La première équation implique que l'ensemble des solutions de (S_5) est vide.

$$(S_6) \iff \begin{cases} x+y=1 \\ 0=0 & L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \end{cases} \iff x+y=1 \iff y=1-x$$

donc l'ensemble des solutions des (S_6) est $\{(x\,;1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} 3x-y+4z=5 \\ 5y-z=1 \\ 2z=3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2z=1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} -x+2y+-z=5 \\ 2y-z=7 \\ 0=3 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} 3x-y+4\times\frac{3}{2}=5 \\ 5y-\frac{3}{2}=1 \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-y+6=5 \\ 5y=\frac{5}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-\frac{1}{2}=-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $\left(-\frac{1}{6}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+y+\frac{1}{2}=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\left\{\left(x\,;-x-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

L'ensemble des solutions de (S_3) est vide en raison de la dernière équation.

Exercice 4. Échelonner puis résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases} -x+3y=5 \\ x-3y=13 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -2x-3y=-7 \\ -6x+9y=2 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} \frac{1}{5}x+6y=3 \\ \frac{1}{3}x+15y=5 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} -y+z=1 \\ x-y-2z=7 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} 2x+2y+3z=4 \\ x+y+z=5 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} -x+3y=5 \\ 0=18 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

La deuxième équation implique de l'ensemble des solutions de (S_1) est vide.

$$(S_2) \iff \begin{cases} -2x-3y=-7 \\ \hfill 18y=23 \quad L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-3\times\frac{23}{18}=-7 \\ \hfill y=\frac{23}{18} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x-\frac{23}{6}=-7 \\ \hfill y=\frac{23}{18} \end{cases} \iff \begin{cases} -2x=-\frac{19}{6} \\ \hfill y=\frac{23}{18} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{19}{12} \\ y=\frac{23}{18} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_2) est $\left(\frac{19}{12}\,;\frac{23}{18}\right)$.

$$(S_3) \iff \begin{cases} \frac{1}{5}x+6y=3 \\ \hfill 5y=0 \quad L_2 \leftarrow L_2-\frac{5}{3}L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{5}x=3 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=15 \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_3) est $(15\,;0)$.

$$(S_4) \iff \begin{cases} x-y-2z=7 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \quad -y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-2(y+1)=7 \\ \hfill z=y+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y-2=7 \\ \hfill z=y+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3y+9 \\ z=y+1 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_4) est $\{(3y+9\,;y\,;y+1) \mid y\in\mathbb{R}\}$.

$$(S_5) \iff \begin{cases} 2x+2y+3z=4 \\ \hfill -\frac{1}{2}z=3 \quad L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y+3\times(-6)=4 \\ \hfill z=-6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+2y-18=4 \\ \hfill z=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y=22 \\ \hfill z=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} y=11-x \\ z=-6 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_5) est $\{(x\,;11-x\,;-6) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ x+y+4z=-9 \\ 7x+5y+z=14 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 8x+2y-2z=9 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x+2y-3z=6 \\ 7x+4y-z=22 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x+y+4z=-9 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x+y-2z=10 \\ 7x+5y+z=14 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+4z=-9 \\ \quad -y-10z=28 \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad -2y-27z=77 \quad L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+4z=-9 \\ \quad -y-10z=28 \\ \hfill -7z=21 \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+4\times(-3)=-9 \\ \quad -y-10\times(-3)=28 \\ \hfill z=-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-12=-9 \\ \quad -y+30=28 \\ \hfill z=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2-12=-9 \\ \hfill y=2 \\ \hfill z=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $(1\,;2\,;-3)$.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ \quad -7y+11z=10 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ -14y+22z=17 & L_3 \leftarrow L_3-8L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ \quad -7y+11z=10 \\ \qquad\qquad 0=19 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

En raison de la dernière équation, l'ensemble des solutions de (S_2) est vide.

$$(S_3) \iff \begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ \quad 5y-10z=10 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ \quad 25y-50y=50 & L_3 \leftarrow L_3-7L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ \quad y-2z=2 & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ \quad y-2z=2 & L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ \quad y-2z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3(2+2z)+7z=-4 \\ \quad y=2+2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ \quad y-2z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-6+z=-4 \\ \quad y=2+2z \end{cases} \iff \begin{cases} x=2-z \\ y=2+2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est $\{(2-z\,;2+2z\,;z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. Déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ \quad 2y+z=4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ \quad y+z+t=2 \\ x \quad +z+t=3 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x+2y-6z=2 \\ 2x-2y+3z=2 \\ x+8y-21z=4 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=1 \\ -2x+3y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+2z-t=3 \\ x-2y+z-2t=2 \\ 4x-2y+4z-2t=6 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} x+\frac{3}{2}y-z=1 \\ 4x-3y+z=4 \\ 2x+12y-7z=34 \end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases} 2x-3y+z-4t=7 \\ x+2y-z+3t=2 \end{cases} \qquad (S_8)\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-4t=0 \\ x+y-z+t=2 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x-y+2z=3 \\ \quad y-3z=-5 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad 2y+z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=3 \\ \quad y-3z=-5 \\ \qquad 7z=14 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

Il y a 3 pivots (1,1 et 7) donc $\mathrm{rg}(S_1)=3$. On en déduit que (S_1) est un système de Cramer donc il admet exactement une solution.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ \quad y+z+t=2 \\ \quad -y \quad +t=2 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ \quad y+z+t=2 \\ \qquad z+2t=4 & L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

Il y a 3 pivots (1,1 et 1) donc $\text{rg}(S_2) = 3$. Grâce à ses 3 pivots, on peut exprimer chacune des inconnues z, y et x en fonction de t donc le système à une infinité de solutions.

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + 2y - 6z = 2 & \\ \quad -6y + 15z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad\quad 6y - 15z = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 6z = 2 & \\ \quad -6y + 15z = -2 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et -6) donc $\text{rg}(S_3) = 2$. Comme la dernière équation de compatibilité est vraie, on en déduit que le système à une infinité de solutions.

$$(S_4) \Longleftarrow \begin{cases} x - y = 1 & \\ \quad y = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad y = -1 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \quad 2y = -2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x - y = 1 & \\ \quad y = -1 & \\ \quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \quad 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et 1) donc $\text{rg}(S_4) = 2$. De plus, les équation de compatibilité sont vraies donc (S_4) possède une unique solution. .

$$(S_5) \iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 & \\ \quad -3y \quad - 3t = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad -3y \quad - 3t = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \quad -6y \quad - 6t = 2 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 & \\ \quad -3y \quad - 3t = 1 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et -3) donc $\text{rg}(S_5) = 2$. De plus, les deux équations de compatibilité sont vraies donc le système à une infinité de solutions.

$$(S_6) \iff \begin{cases} x + \frac{3}{2}y - z = 1 & \\ \quad -9y + 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \quad\quad 9y - 5z = 32 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{3}{2}y - z = 1 & \\ \quad -9y + 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = 32 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et -9) donc $\text{rg}(S_6) = 2$. De plus, la dernière équations de compatibilité est fausse donc l'ensemble des solutions est vide.

$$(S_7) \iff \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x - 3y + z - 4t = 7 & \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 2 & \\ \quad -7y + 3z - 10t = 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

Il y a 2 pivots (1 et -7) donc $\text{rg}(S_7) = 2$ et, comme il n'y a pas d'équation de compatibilité, l'ensemble des solutions est infini.

$$(S_8) \iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 & \\ \quad -2y \quad - 5t = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad\quad -2z \quad\quad = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Il y a 3 pivots (1, -2 et -2) donc $\text{rg}(S_8) = 3$ et, comme il n'y a pas d'équations de compatibilité, l'ensemble des solutions est infini.

Exercice 7. Soit a un nombre réel. Déterminer, en fonction de la valeur de a, le rang des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} x+y+az=0 \\ 2x+y+az=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} (2-a)x \quad +4z=0 \\ 3x-(4+a)y+12z=0 \\ x-2y+(5-a)z=0 \end{cases}$$

Solution.

$$(S_1) \iff \begin{cases} x+y+az=0 & \\ \quad -y-az=0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad -3y+(5-2a)z=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+az=0 & \\ \quad -y-az=0 & \\ \quad (5+a)z=0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{cases}$$

Si $a \neq -5$ alors le rang du système 3 et, si $a=-5$, le rang du système est 2.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x-2y+(5-a)z=0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 3x-(4+a)y+12z=0 & \\ (2-a)x \quad +4z=0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+(5-a)z=0 & \\ (2-a)y+(3a-3)z=0 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ (4-2a)y+(4-(2-a)(5-a))z=0 & L_3 \leftarrow L_3-(2-a)L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+(5-a)z=0 \\ (2-a)y+(3a-3)z=0 \\ (4-2a)y+(4-(10-7a+a^2))z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+(5-a)z=0 \\ (2-a)y+(3a-3)z=0 \\ (4-2a)y-(a^2-7a+6)z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+(5-a)z=0 & \\ (2-a)y+(3a-3)z=0 & \\ \qquad -(a^2-a)z=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

Si $a^2-a=a(a-1)\neq 0$ et $2-a\neq 0$ c'est-à-dire si $a \notin \{0\,;1\,;2\}$ alors $\mathrm{rg}(S_2)=3$.
Si $a^2-a=a(a-1)=0$ et $2-a\neq 0$ c'est-à-dire si $a \in \{0\,;1\}$ alors $\mathrm{rg}(S_2)=2$.
Si $a=2$ la système échelonné devient

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ \qquad 3z=0 \\ \qquad -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 & \\ \qquad 3z=0 & \\ \qquad 0=0 & L_3 \leftarrow L_3+\frac{2}{3}L_2 \end{cases}$$

et donc $\mathrm{rg}(S_2)=2$.

Exercice 8. Lors d'un spectacle, on a vendu des places à 16 euros (tarif plein) et des places à 10 euros (tarif réduit). Il y a eu 852 spectateurs pour une recette de 11 160 euros.

Déterminer le nombre de places à tarif plein et le nombre de places à tarif réduit.

Solution. Notons x le nombre de places vendues à plein tarif et y le nombre de places vendues à tarif réduit. L'énoncé se traduit par le système :

$$(S)\begin{cases} x+y=852 \\ 16x+10y=11\,160 \end{cases}$$

Or,

$$(S)\iff\begin{cases} x+y=852 \\ -6y=2\,476 \quad L_2\leftarrow L_2-16L_1 \end{cases}\iff\begin{cases} x+412=852 \\ y=412 \end{cases}\iff\begin{cases} x=440 \\ y=412 \end{cases}$$

Ainsi, on a vendu 440 places à plein tarif et 412 places à tarif réduit.

Exercice 9. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f:x\longmapsto ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels.. Sachant que la courbe de f dans un repère du plan passe par les point $\mathrm{A}(1\,;2)$, $\mathrm{B}(-1\,;3)$ et $\mathrm{C}(3\,;-2)$, déterminer f.

Solution. Par hypothèse, $f(1)=2$, $f(-1)=1$ et $f(2)=-1$ donc a, b et c vérifient le système :

$$(S)\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 9a+3b+c=-2 \end{cases}$$

Ot,

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} a+b+c=2 \\ -2b\qquad=1 \quad L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ -6b-8c=-20 \quad L_3\leftarrow L_3-9l_1 \end{cases}\iff\begin{cases} a+b+c=2 \\ -2b=1 \\ -8c=-23 \quad L_3\leftarrow L_3-3l_2 \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} a-\frac{1}{2}+\frac{23}{8}=2 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{23}{8} \end{cases}\iff\begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{23}{8} \end{cases}$$

Ainsi, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f:x\longmapsto -\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{23}{8}$.

Exercice 10. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f:x\longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des réels. Sachant que la courbe de f dans un repère du plan passe par les point $\mathrm{A}(0\,;1)$, $\mathrm{B}(-1\,;1)$, $\mathrm{C}(1\,;2)$ et $\mathrm{D}(2\,;-1)$, déterminer f.

Solution. Par hypothèse, $f(0)=1$, $f(-1)=1$ et $f(1)=2$ et $f(2)=-1$ donc a, b, c et d vérifient le système :

$$(S)\begin{cases} d=1 \\ -a+b-c+d=1 \\ a+b+c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-1 \end{cases}$$

Ot,

$$(S)\iff\begin{cases} d=1 \\ -a+b-c+1=1 \\ a+b+c+1=2 \\ 8a+4b+2c+1=-1 \end{cases}\iff\begin{cases} d=1 \\ -a+b-c=0 \\ a+b+c=1 \\ 8a+4b+2c=-2 \end{cases}$$

On peut donc se restreindre à résoudre le système

$$(S')\begin{cases}-a+b-c=0\\ a+b+c=1\\ 8a+4b+2c=-2\end{cases}$$

Or,

$$(S') \iff \begin{cases}-a+b-c=0\\ \quad 2b \qquad = 1 & L_2 \leftarrow L_2+L_1\\ \quad 12b-6c=-2 & L_3 \leftarrow L_3+8L_1\end{cases} \iff \begin{cases}-a+b-c=0\\ \quad 2b \qquad =1\\ \qquad -6c=-8 & L_3 \leftarrow L_3-6L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-a+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=0\\ b=\frac{1}{2}\\ c=\frac{4}{3}\end{cases} \iff \begin{cases}a=-\frac{5}{6}\\ b=\frac{1}{2}\\ c=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Ainsi, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto -\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x+1$.

Exercice 11. Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas entièrement plat : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres par heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat ? Quelle est la plus haute de ces deux villes ? Quelle est leur différence d'altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres par heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les longueurs de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est plate.

Solution.

1. Notons m le nombre de km en montée à l'aller, p le nombre de km de la partie plate et d le nombre de km en descente à l'aller. Alors, d'après l'énoncé, $\frac{m}{15}+\frac{p}{20}+\frac{d}{30}=2$. Sur le chemin du retour, les montées et les descentes s'inversent de sorte que $\frac{m}{30}+\frac{p}{20}+\frac{d}{15}=3$. En multipliant ces deux égalités par 60, on obtient $4m+3p+2d=120$ et $2m+3p+4d=180$ puis en ajoutant ses deux nouvelles égalités membres à membres, on obtient $6m+6p+6d=300$ de sorte que $m+p+d=50$.

   Ainsi, les deux villes sont distantes de 50 km.

   Puisque le cycliste met plus de temps à l'retour qu'à l'aller, cela signifie qu'il y a plus de montée au retour donc Issy est plus haute que Labat.

   En soustrayant membre à membre les deux égalité $4m+3p+2d=120$ et $2m+3p+4d=180$, on obtient $2m-2d=-60$ donc $m-d=-30$. Ainsi, il y a 30 km de plus de descente que de montée à l'aller et, comme le pente moyenne est de 5 pour cent, la différence d'altitude entre les deux villes est $30\times\frac{5}{100}=1{,}5$ km soit 1 500 m.
2. En gardant les mêmes notations, on a $\frac{m}{20}+\frac{p}{30}+\frac{d}{40}+\frac{m}{40}+\frac{p}{30}+\frac{d}{20}=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ (car 40 minutes correspond à $\frac{2}{3}$ d'heure). Ainsi, $\frac{3}{40}m+\frac{p}{15}+\frac{3}{40}d=\frac{11}{3}$ donc, en multipliant par 120, on obtient $9m+8p+9d=440$.

   Ainsi, les nombres m, p et d sont solutions du système

$$(S)\begin{cases}m+p+d=50\\ m-d=-30\\ 9m+8p+9d=440\end{cases}$$

Or,

$$(S) \iff \begin{cases} m+p+d=50 \\ \quad -p-2d=-80 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad -p \qquad =-10 & L_3 \leftarrow L_3 - 9L1 \end{cases} \iff \begin{cases} m+10+d=50 \\ \quad -10-2d=-80 \\ \qquad p \qquad =10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m+10+35=50 \\ \qquad\qquad d=35 \\ \qquad p \qquad =10 \end{cases} \iff \begin{cases} m=5 \\ d=35 \\ p=10 \end{cases}$$

Ainsi, à l'aller, il y a 5 km en montée, 10 km de plat et 35 km en descente (et inversement au retour).

Exercice 12. Résoudre le système de n équations à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n :

$$(S) \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1 \\ x_1+2x_1+x_3+\cdots+x_n=2 \\ x_1+x_2+2x_3+\cdots+x_n=3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+2x_n=n \end{cases}$$

Solution. Supposons que $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ soit une solution de (S). On remarque que chaque ligne du système peut s'écrire

$$x_i + \sum_{k=1}^{n} x_k = i.$$

Posons $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ de sorte que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i + s = i.$$

Alors, en additionnant toutes les lignes du système, on trouve

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + s) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + s) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} s = s + ns = (n+1)s.$$

Ainsi, $(n+1)s = \frac{n(n+1)}{2}$ donc, comme $n+1 \neq 0$, $s = \frac{n}{2}$.

Comme, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i + s = i$, on en déduit que $x_i + \frac{n}{2} = i$ donc $x_i = i - \frac{n}{2}$.

Réciproquement, si, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = i - \frac{n}{2}$ alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} x_i + s &= i - \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{n}{2}\right) \\ &= i - \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2} = i - \frac{n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n \times \frac{n}{2} \\ &= i + \frac{n - +n^2 + n - n^2}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

donc $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est solution de (S).

Ainsi, on conclut que l'unique solution de (S) est $(1 - \frac{n}{2}, 2 - \frac{n}{2}, \cdots, n - \frac{n}{2})$.