♦ Corrigés des exercices du chapitre 6

Exercice 1.

1. Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés.

$$180° \qquad 90° \qquad 10° \qquad 135° \qquad 50°.$$

2. Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians.

$$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad \frac{5\pi}{6} \qquad \frac{11\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{12}.$$

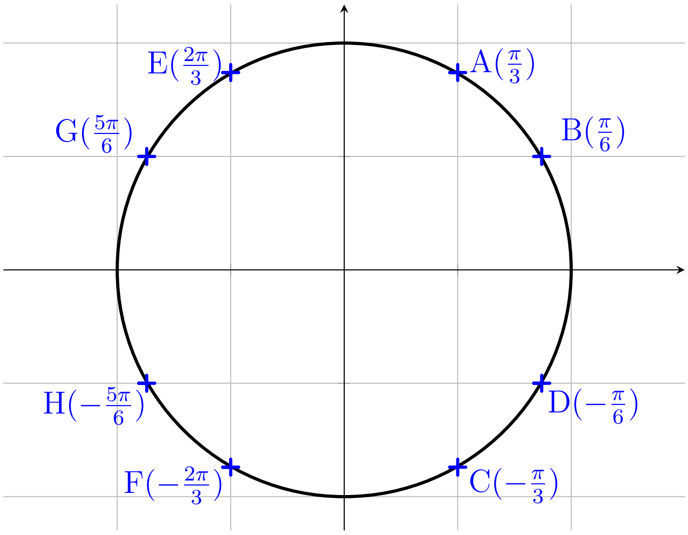
Solution.

1. 180° correspond à π rad, 90° correspond à $\frac{\pi}{2}$ rad, 10° correspond à $\frac{\pi}{18}$ rad, 135° correspond à $\frac{135\pi}{180}$ rad $= \frac{3\pi}{4}$ rad et 50° correspond à $\frac{50\pi}{180}$ rad $= \frac{5\pi}{18}$ rad.

2. $\frac{\pi}{3}$ rad correspond à $\frac{180}{3} = 60$ degrés, $\frac{3\pi}{2}$ rad correspond à $\frac{3\times180}{2} = 270$ degrés, $\frac{5\pi}{6}$ rad correspond à $\frac{5\times180}{6} = 150$ degrés, $\frac{11\pi}{6}$ rad correspond à $\frac{11\times180}{6} = 330$ degrés et $\frac{\pi}{12}$ rad correspond à $\frac{180}{12} = 15$ degrés.

Exercice 2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les images respectives des réels suivants :

$$\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}.$$



Solution. Voir ci-dessus.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{12},\ y = -\frac{11\pi}{12} \qquad \text{b) } x = \frac{2\pi}{5},\ y = \frac{22\pi}{5} \qquad \text{c) } x = \frac{\pi}{7},\ y = -\frac{13\pi}{7}.$$

Solution.

a) $x - y = \frac{\pi}{12} - (-\frac{11\pi}{12}) = \pi = \frac{1}{2} \times 2\pi$ donc, comme $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, x et y n'ont pas la même image sur le cercle trigonométrique.

b) $x - y = \frac{2\pi}{5} - \frac{22\pi}{5} = -\frac{20\pi}{5} = -2 \times 2\pi$ donc, comme $-2 \in \mathbb{Z}$, x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique.

c) $x - y = \frac{\pi}{7} - (-\frac{13\pi}{7}) = \frac{14\pi}{7} = 1 \times 2\pi$ donc, comme $1 \in \mathbb{Z}$, x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique.

Exercice 4. Déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right)$$

Solution.

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \cos(2\pi + \pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \sin(\frac{18\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \sin(2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right) = \cos(-\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \cos(-10\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Exercice 5.

1. Soit x un réel tel que $\cos(x) = \frac{3}{5}$ et $\sin(x) \leqslant 0$. Déterminer $\sin(x)$.
2. Soit x un réel tel que $\sin(x) = -0{,}8$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\cos(x)$.
3. Soit x un réel tel que $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) \neq 1$. Déterminer $\cos(x)$.

Solution.

1. Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\sin^2(x) = 1 - (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ donc, comme $\sin(x) \leqslant 0$, $\sin(x) = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.
2. Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos^2(x) = 1 - (-0{,}8)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$. De plus, comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ donc $\cos(x) = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.
3. Sachant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos^2(x) = 1 - 0^2 = 1$ donc, comme $\cos(x) \neq 1$, $\cos(x) = -1$.

Exercice 6. En plus des valeurs vues en cours, il est possible de déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus de certains autres nombres. On peut par exemple démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. On admettra ce résultat dans tout cet exercice.

1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$.
2. Démontrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

Solution.

1. $\cos(\frac{3\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) = -\cos(\frac{2\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.
   $\cos(-\frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   $\cos(\frac{7\pi}{5}) = \cos(\pi + \frac{2\pi}{5}) = -\cos(\frac{2\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.
2. Étant donné que $\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + \sin^2(\frac{2\pi}{5}) = 1$,
   $$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16} = \frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}.$$
   De plus, $\frac{2\pi}{5} \in [0 ; \pi]$ donc $\sin(\frac{2\pi}{5}) \geqslant 0$. Dès lors, $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
3. $\cos(\frac{\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
   $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   $\cos(\frac{9\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}) = -\sin(\frac{2\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.
   $\sin(\frac{9\pi}{10}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Exercice 7. Déterminer, en justifiant sa réponse, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Pour tout réel x, $\sin(2\pi - x) = \sin(x)$.

2. Pour tout réel x, $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$.

3. Pour tout réel x, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

4. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = \cos(x)$.

Solution.

1. La proposition est fausse. Par exemple, pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -sin(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 1 = \sin(\frac{\pi}{2})$.

2. La proposition est vraie. En effet, pour tout réel x, $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x)$.

3. La proposition est vraie d'après le cours.

4. La proposition est fausse. Par exemple, pour $x = 0$, $\cos(\pi - 0) = \cos(\pi) = -1 \neq 1 = \cos(0)$.

Exercice 8. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (E_2)\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (E_3)\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad (E_4)\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solution.

Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$(E_1) \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}.$$

L'ensemble des solutions de (E_1) dans $]-\pi\,;\pi]$ est $\{-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\}$.

Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$(E_2) \iff \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \iff x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4}.$$

L'ensemble des solutions de (E_2) dans $]-\pi\,;\pi]$ est $\{-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{4}\}$.

Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$, $x + \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right]$ et

$$(E_3) \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi.$$

L'ensemble des solutions de (E_3) dans $]-\pi\,;\pi]$ est $\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6}\}$.

Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$\begin{aligned}(E_4) &\iff -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \iff x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_4) dans $]-\pi\,;\pi]$ est $\{-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\}$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{1}{2} \qquad (E_2)\ \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (E_3)\ \sin(3x+\pi) = \frac{1}{2} \qquad (E_4)\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solution.

Pour tout réel x,

$$(E_1) \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

L'ensemble des solutions de (E_1) dans $\mathbb{R}$ est $\{-\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout réel x,

$$(E_2) \iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff 2x = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{8}\ [\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8}\ [\pi].$$

L'ensemble des solutions de (E_2) dans $\mathbb{R}$ est $\{-\frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff -\sin(3x) = \frac{1}{2} \iff \sin(3x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(3x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff 3x = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 3x = -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \iff x = -\frac{\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{18}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_3) dans $\mathbb{R}$ est $\{-\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour tout réel x,

$$(E_4) \iff \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff 5x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } 5x = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{30}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{30}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right].$$

L'ensemble des solutions de (E_4) dans $\mathbb{R}$ est $\{-\frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 10. Dans chaque cas, résoudre l'inéquation sur l'intervalle J.

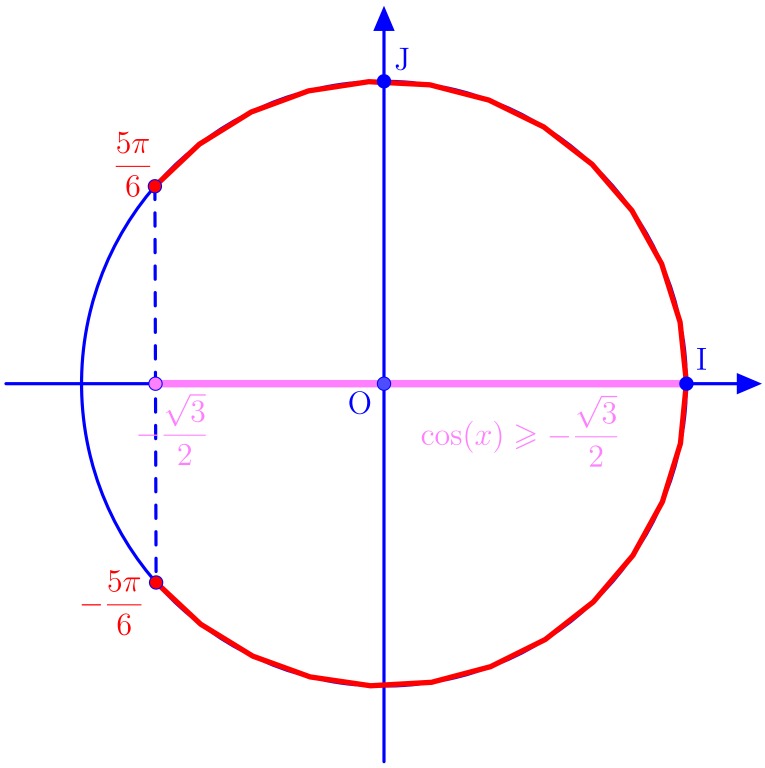
$$(I_1)\ \cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad J =]-\pi\,;\pi] \qquad (I_2)\ \cos(x) + 1 \leqslant \frac{1}{2} \quad J =]0\,;2\pi]$$

$$(I_3)\ \sin(2x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad J = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad (I_4)\ \cos(3x) \geqslant \frac{1}{2} \quad J = \left]0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$(I_5)\ 2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 \leqslant 0 \quad J =]-\pi\,;\pi]$$

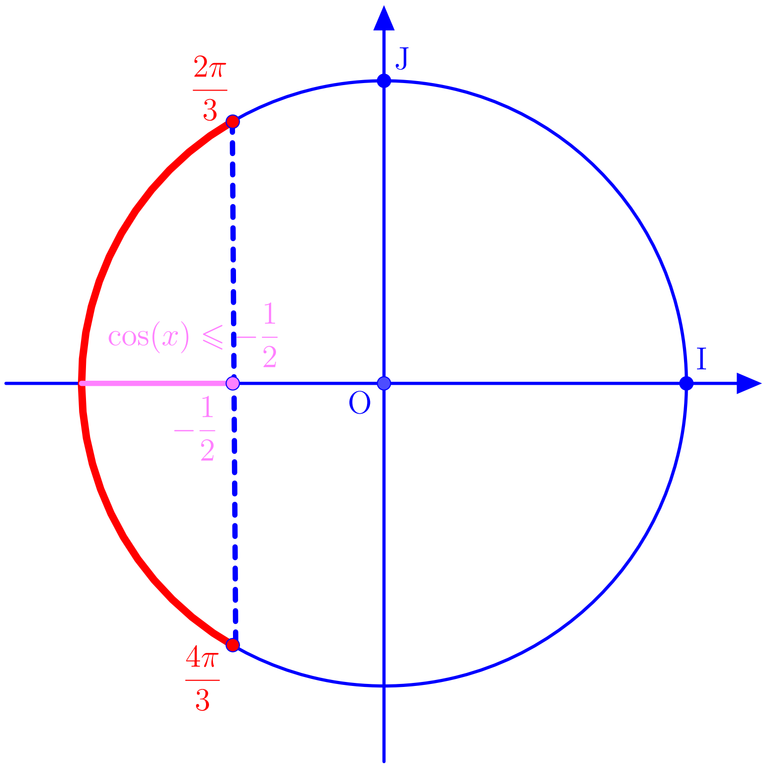
Solution.

Pour (I_1) :



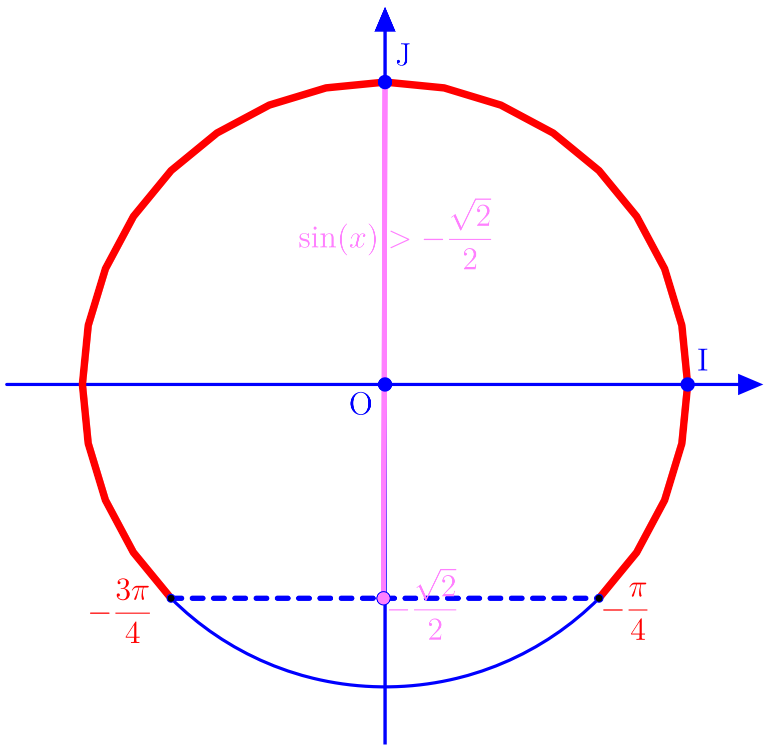
L'ensemble des solutions de (I_1) est $\left[-\frac{5\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$.

$(I_2) \iff \cos(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$:



L'ensemble des solutions de (I_2) sur $]0\,;2\pi]$ est $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right]$.

Pour (I_3), on pose $X = 2x$. Comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $X \in \,]-\pi\,;\pi]$. On commence par résoudre $\sin(X) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur cet intervalle :

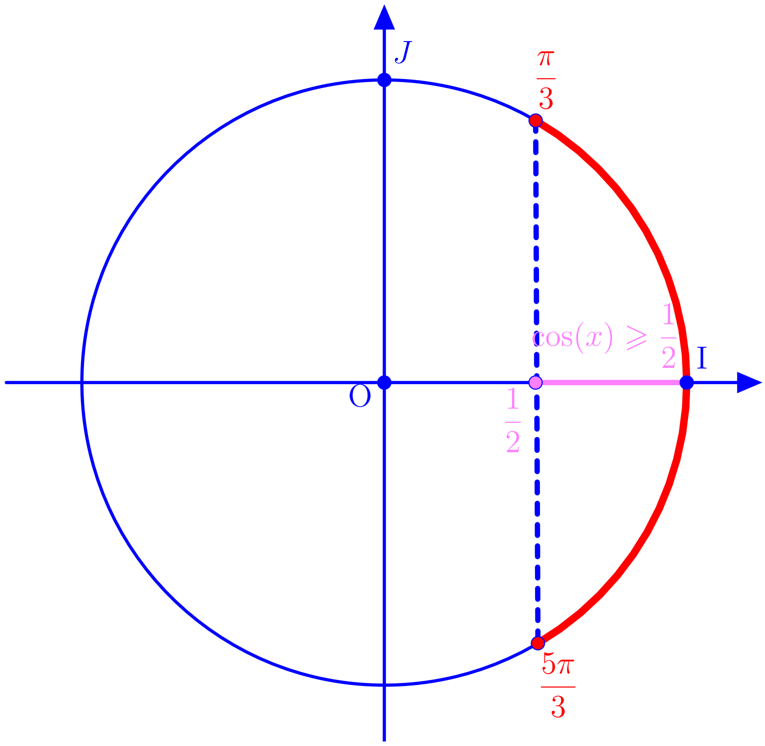


Ainsi, $\sin(X) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $X \in \left]-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4}\,;\pi\right[$ donc

$$(I_3) \iff -\pi < 2x < -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4} < 2x < \pi \iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{8} \text{ ou } -\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{2}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_3) est $\left]-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{8}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour (I_4), on pose $X = 3x$. Comme $x \in \left]0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, $X \in]0\,;2\pi]$. On commence par résoudre $\cos(X) > \frac{1}{2}$ sur cet intervalle :



Ainsi, $\cos(X) \geqslant \frac{1}{2}$ si et seulement si $X \in \left]0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$ donc

$$(I_4) \iff 0 < 3x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant 2\pi \iff 0 < x \leqslant \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{5\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}.$$

On conclut que l'ensemble de solutions de (I_4) est $\left]0\,;\frac{\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$.

Pour (I_5), en posant $X = \sin(x)$, l'inéquation s'écrit $2X^2 + 3X + 1 \leqslant 0$. Le discriminant du trinôme $P(X) = 2X^2 + 3X + 1$ est $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$ donc l'équation $P(X) = 0$ possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}.$$

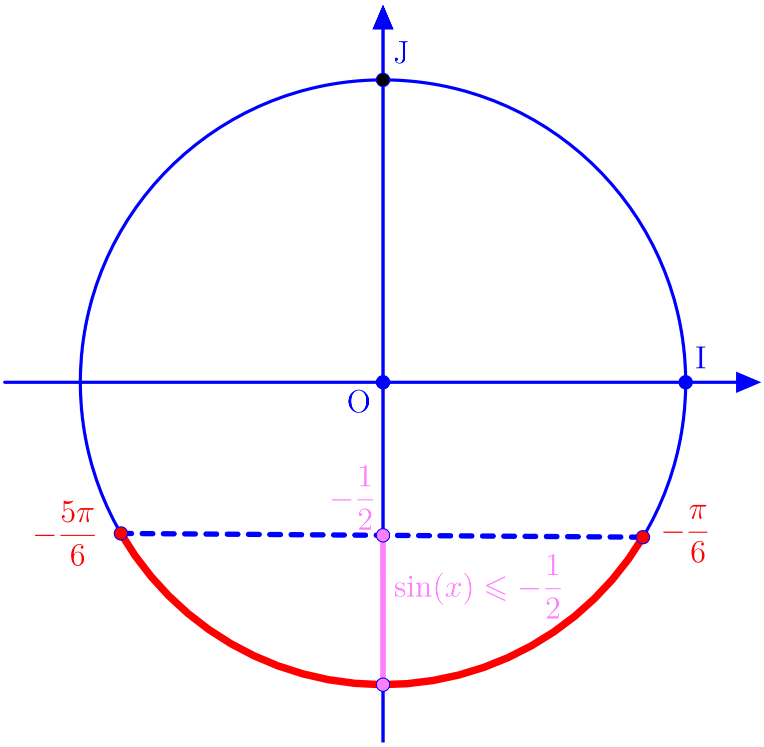
Comme $a = 2 > 0$, on a donc le tableau de signe suivant :

X	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $P(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, étant donné que, pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1$, on a

$$(I) \iff P(\sin(x)) \leqslant 0 \iff \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$$

On résout cette dernière inéquation sur $]-\pi\,;\pi]$:



On conclut que l'ensemble des solutions de (I_5) de $\left[-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\right]$.

Exercice 11. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution. Étant donné que $\cos^2(\frac{\pi}{8}) + \sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1$,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{4-(2+\sqrt{2})}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

De plus, comme $\frac{\pi}{8} \in [0\,;\pi]$, $\sin(\frac{\pi}{8}) \geqslant 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 12. On considère le réel $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$ et en déduire α.

2. Montrer que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Solution.

1. Par les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} - 1 = \frac{16+4\sqrt{12}-16}{16} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Comme $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $2\alpha \in [0\,;\pi]$ donc on en déduit que $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ et donc $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

2. Étant donné que $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$,

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16}$$
$$= \frac{16-(8+4\sqrt{3})}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{8-4\sqrt{2}}{16}.$$

De plus, comme $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\alpha) \geqslant 0$ donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{4}$. En remarquant que $8-4\sqrt{3} = 6-2\sqrt{12}+2 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$, on en déduit que $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \left|\sqrt{6}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ et donc $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 13.

1. Résoudre l'équation $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'inéquation $\cos(x)-\sin(x) < 1$ sur $]-\pi\,;\pi]$.

3. Démontrer que, pour tout réel x, $\cos(x)+\sin(x) \leqslant \sqrt{2}$.

Solution.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors, $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$ est de la forme $A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $A=1$ et $B=\sqrt{3}$. On calcule $R=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{4}=2$ et on factorise :

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)$$

On reconnaît en $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$ donc, par les formules d'addition,

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right) = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2} &\iff 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2} \iff \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \text{ ou } x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\\ &\iff x=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x=\frac{\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2}$ est $\{\frac{\pi}{12}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{7\pi}{12}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors, $\cos(x)-\sin(x)$ est de la forme $A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $A=1$ et $B=-1$. On calcule $R=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2}$ et on factorise :

$$\cos(x)-\sin(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right)$$

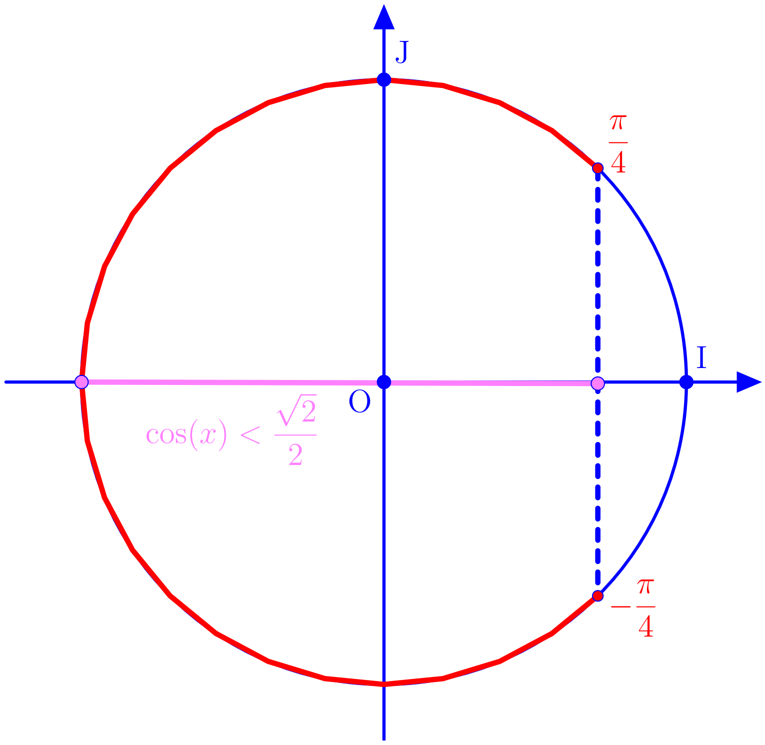
On reconnaît en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$ donc, par les formules d'addition,

$$\cos(x)-\sin(x) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit que

$$\cos(x) - \sin(x) < 1 \iff \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En posant $X = x + \frac{\pi}{4}$, on est ramené à résoudre l'inéquation $\cos(X) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $X \in \left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$ car $x \in \left]-\pi\,;\pi\right]$:



Ainsi, sur $\left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$, $\cos(X) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $X \in \left]-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$ donc, pour tout $x \in \left]-\pi\,;\pi\right]$,

$$\cos(x) - \sin(x) < 1 \iff -\frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{4}$$
$$\iff -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{ ou } 0 < x \leqslant \pi$$

On conclut que l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) - \sin(x) < 1$ dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ est $\left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]0\,;\pi\right]$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\cos(x) + \sin(x)$ est de la forme $A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A = 1$ et $B = 1$. On calcule $R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2}$ et on factorise :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right)$$

On reconnaît en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{4}$ donc, par les formules d'addition,

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Or, $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leqslant 1$ donc $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \leqslant \sqrt{2}$ c'est-à-dire $\cos(x) + \sin(x) \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice 14. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{3}{4}\sin(2x) - 3\sin(x)\cos^2(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3\cos(x)\sin(x)\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)$.

b. Étudier le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [0\,;\pi]$.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{3}{4}\sin(2(x+2\pi)) - 3\sin(x+2\pi)\cos^2(x+2\pi) \\ &= \frac{3}{4}\sin(2x+4\pi)) - 3\sin(x)\cos^2(x) \\ &= \frac{3}{4}\sin(2x) - 3\sin(x)\cos^2(x) = f(x). \end{aligned}$$

De même, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3}{4}\sin(2(-x)) - 2\sin(-x)\cos^2(-x) \\ &= \frac{3}{4}\sin(-2x) + 2\sin(x)\cos^2(x) \\ &= -\frac{3}{4}\sin(2x) + 2\sin(x)\cos^2(x) = -f(x). \end{aligned}$$

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3}{2}\sin(x)\cos(x) - 3\sin(x)\cos^2(x)$$

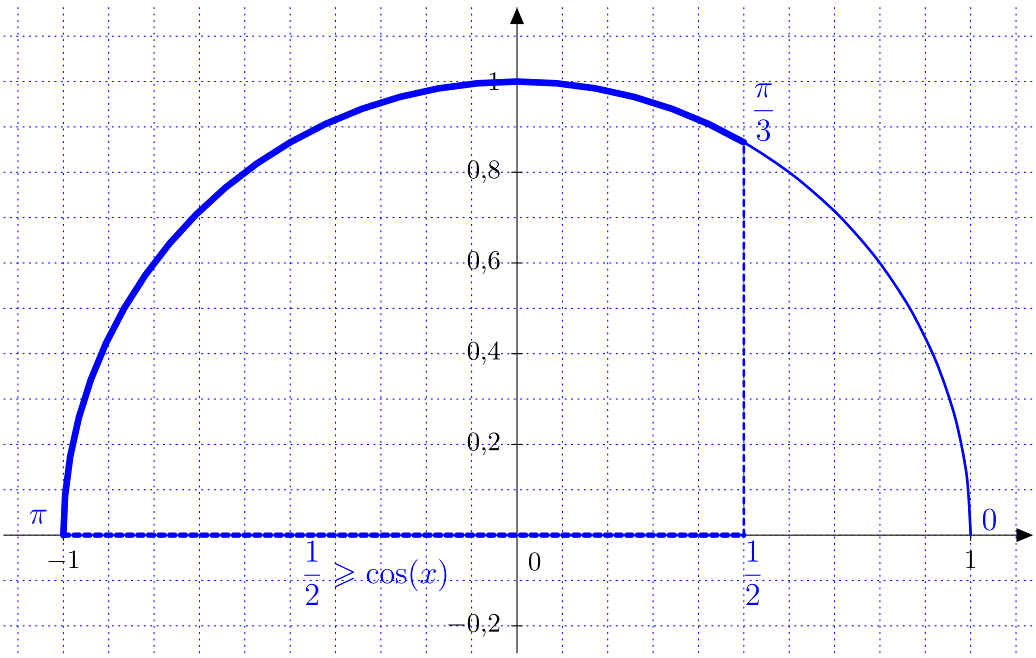
et donc, en factorisant par $3\sin(x)\cos(x)$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3\cos(x)\sin(x)\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right).$$

b. Sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, la fonction sinus est toujours positive et la fonction cosinus est positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis négative sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Étudions le signe de $\frac{1}{2} - \cos(x)$. Pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{2} - \cos(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{2} \geqslant \cos(x)$$



Ainsi, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\frac{1}{2} - \cos(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\sin(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $\cos(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de $\frac{1}{2} - \cos(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 15. Démontrer que, pour tous réels a et b,

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Solution. D'après les formules d'addition, pour tous réels x et y,

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

donc, en sommant ces deux égalités, on obtient $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$. Pour tous réels a et b, on peut appliquer ceci avec $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$ et il vient

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Exercice 16.

1. Soit $(a\,;b) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[^2$. Démontrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

2. En déduire, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$, une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

3. On pose $a = \tan(\frac{\pi}{12})$.

a. Calculer $\tan(\frac{\pi}{6})$.

b. À l'aide de la question **2.**, démontrer que $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{1-a^2}$.

c. En déduire que $a^2 + 2\sqrt{3}a - 1 = 0$.

d. Déterminer la valeur de a en résolvant l'équation polynomiale de degré 2 de la question précédente.

4. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Solution.

1. Grâce au formule d'addition,

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$, on obtient

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}-\frac{\sin(a)sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{sin(b)}{\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$. En appliquant le résultat de la question précédente à $a = b = x$, on obtient

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

3. **a.** Par définition,

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b. En appliquant le résultat de la question **2.** avec $x = \frac{\pi}{12}$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\tan(\frac{\pi}{12})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{12})} = \frac{2a}{1-a^2}.$$

c. Il s'ensuit que $1-a^2 = 2a\sqrt{3}$ donc $0 = a^2+2\sqrt{3}a-1$.

d. Le discriminant du trinôme $X^2+2\sqrt{3}X-1$ est $\Delta = (2\sqrt{3})^2-4\times1\times(-1) = 16 > 0$ donc l'équation $X^2+2\sqrt{3}X-1 = 0$ possède deux solutions réelles :

$$\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}-4}{2} = -2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}+4}{2} = 2-\sqrt{3}$$

Ainsi, a est l'une de ces deux valeurs. De plus, comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\frac{\pi}{12}) > 0$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) \geqslant 0$ donc $a \geqslant 0$. On conclut donc que $a = 2-\sqrt{3}$.

4. Comme $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{x}{2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ donc, d'après le résultat de la question **2.**,

$$\tan(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1-t^2}$$

On en déduit que

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) = \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}$$

donc

$$\frac{\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}.$$

Dès lors,

$$(1-t^2)^2\sin^2(x) = 4t^2(1-\sin^2(x)) = 4t^2-4t^2\sin^2(x)$$

donc $(1-t^2)^2\sin^2(x)+4t^2\sin^2(x)=4t^2$. Or,

$$\begin{aligned}(1-t^2)^2\sin^2(x)+4t^2\sin^2(x)&=\left[(1-t^2)^2+4t^2\right]\sin^2(x)\\&=(1-2t^2+t^4+4t^2)\sin^2(x)\\&=(1+2t^2+t^4)\sin^2(x)\\&=(1+t^2)^2\sin^2(x)\end{aligned}$$

donc $(1+t^2)^2\sin^2(x)=4t^2$ donc $\sin^2(x)=\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$. De plus, comme $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x)\geqslant 0$ et, comme $\frac{x}{2}\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$, $t\geqslant 0$. On conclut donc que $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$.
De plus, $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=\frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}$ et, comme $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x)\geqslant 0$ et $0\leqslant t\leqslant 1$ donc $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.