⧫ Corrigés des exercices du chapitre 5

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes sans symbole $\sum$.

$$S_1=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i}\qquad S_2=\sum_{j=0}^{6}8\qquad S_3=\sum_{k=0}^{3}\sqrt{1+k}\qquad S_4=\sum_{i=1}^{4}(m+m^2)\qquad S_5=\sum_{n=1}^{4}2n.$$

Solution.
$S_1=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{137}{60}$.
$S_2=8+8+8+8+8+8+8+8=8\times 7=56$.
$S_3=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$S_4=(m+m^2)+(m+m^2)+(m+m^2)+(m+m^2)=4(m+m^2)$
$S_5=2+4+6+8=20$

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

1. $S_1=1+2+3+4+5+\cdots+10$;
2. $S_2=1+2+4+8+16+\cdots+1024$;
3. $S_3=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{9\times 10}$;
4. $S_4=0-1+2-3+4-5+\cdots+10$.

Solution.

1. $S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$.
2. $S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2^k$.
3. $S_3=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$.
4. $S_4=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-1)^k k$.

Exercice 3. Déterminer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tous réels a_0, a_1, ..., a_{n+3}.

$$\textbf{1. }\sum_{k=4}^{n}a_{k-3}=\sum_{k=7}^{n+3}a_k\qquad \textbf{2. }\sum_{k=1}^{n-2}a_{n-k}=\sum_{k=1}^{n-2}a_k\qquad \textbf{3. }\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=n}^{0}a_{n-k}.$$

Solution.

1. L'égalité est fausse. Par exemple, si $n=4$ et si $a_k=k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ alors $\displaystyle\sum_{k=4}^{4}a_k=a_4=4$ et $\displaystyle\sum_{k=7}^{7}a_k=a_7=7$.
2. L'égalité est fausse. Par exemple, si $n=3$ et si $a_k=k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_{3-k}=a_2=2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=1$.

3. L'égalité est fausse. Par exemple, si $n = 1$ et si $a_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{k=0}^{1} a_k = a_0 + a_1 = 1$ et $\sum_{k=1}^{0} a_{1-k} = 0$ car $1 > 0$.

Exercice 4. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel λ et pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p$.

Solution.

1. La proposition est fausse. Pour $n = 2$, $\lambda = 1$ et $a_1 = a_2 = 1$, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda + a_i) = (1 + a_1) + (1 + a_2) = 4$ et $\lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + a_1 + a_2 = 3$.

2. La proposition est vraie par linéarité de la somme.

3. La proposition est fausse. Pour $n = 2$, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$.

4. La proposition est fausse. Pour $n = 2$, $p = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = a_1^2 + a_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p = (a_1 + a_2)^2 = (1 + 1)^2 = 4$.

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n + 2)2^n = (n + 1)2^{n+1}$.

2. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)2^{k-1} = n2^n$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(2n + 2)2^n = 2(n + 1)2^n = (n + 1) \times 2 \times 2^n = (n + 1)2^{n+1}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)2^{k-1} = n2^n$ ».

Initialisation. D'une part, $\sum_{k=1}^{0} (k + 1)2^{k-1} = 0$ (car $1 > 0$) et, d'autre part, $02^0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)2^{k-1} = n2^n$ ». Alors,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{k-1} + (n+2)2^n = n2^n + (n+2)2^n = (2n+2)2^n = (n+1)2^{n+1}$$

grâce à la question **1.**. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1} = n2^n$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{k+1} - k^k\right)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

Solution.
Pour S_1, on reconnaît une série téléscopique donc $S_1 = (n+1)^{n+1} - 1$.
Pour S_2, il faut distinguer selon la parité de n.
Si n est pair alors on peut écrire $n = 2q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2q-1) + 2q = \sum_{j=1}^{q}(2j - (2j-1)) = \sum_{j=1}^{q} 1 = q = \frac{n}{2}.$$

Si n est impair alors on peut écrire $n = 2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}$ et ainsi, d'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k &= -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2q-1) + 2q - (2q+1)\\ &= \sum_{j=1}^{q}(2j - (2j-1)) - (2q+1)\\ &= q - (2q+1) = -(q+1) = -\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

On conclut donc que $S_2 = \frac{n}{2}$ si n est pair et $S_2 = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3$.
2. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 5$.
3. $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.
4. $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$.
5. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 3u_{n-1}$.
6. $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 1$.
7. $u_2 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.

Solution.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3n$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_0 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 5n$.
3. La suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n$.
4. La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = -1$ donc, pur tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
5. La suite (u_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

6. La suite (u_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $u_0 = -2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 - n$.
7. La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_2 = 3$ donc, pur tout entier $n \geqslant$, $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1-1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2.$$

   Ainsi, (u_n) est une suite arithmétique de raison 2. De plus, son premier terme est $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1}$ c'est-à-dire $v_0 = 1$.
2. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + 2n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n}$. On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2n+1}$.

Exercice 9. On considère une population de 1 000 bactéries dans une boite de pétri. La population double chaque heure, et à la fin de chaque heure on en rajoute 10 000. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de bactéries après n heures, comptée en milliers d'individus.

1. Quelle est la valeur de u_0 ?
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4. On pose $v_n = u_n + 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.
6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Solution.

1. D'après l'énoncé, $u_0 = 1$.
2. Toujours d'après l'énoncé, $u_1 = 2 \times 1 + 10 = 12$ et $u_2 = 2 \times 12 + 10 = 34$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2un_+10$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 10 = 2u_n + 10 + 10 = 2(u_n + 10) = 2v_n$$

   donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10 = 11$.
5. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 11 \times 2^n$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 10$ donc $u_n = v_n - 10$ c'est-à-dire $u_n = 11 \times 2^n - 10$.

Exercice 10. On place sur un compte rémunérer à 2% par an la somme de 2000 euros. Combien y a-t-il sur le compte après 10 ans ?

Solution. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la somme (en euros) disponible sur le compte après n année. Alors, $u_0 = 2\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{100}\right) u_n = 1,,02u_n$. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02. Comme $u_0 = 2000$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2000 \times 1{,}02^n$. Dès lors, $u_{10} = 2437{,}99$ donc, après dix années, il y aura 2437,99 euros sur le compte.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs.

1. Écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide du symbole $\sum$.
2. En utilisant la linéarité de la somme, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de S_n sans le symbole $\sum$.

Solution.

1. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.
2. Par linéarité de la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2.$$

Exercice 12. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-5)^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n}$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}3^k \qquad S_6 = \sum_{k=2}^{n} 3^k \qquad S_7 = \sum_{k=0}^{n} 1^k \qquad S_8 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k^2 2^k}{2^{k+1}}$$

Solution.

$$S_1 = \frac{1-(-5)^{n+1}}{1-(-5)} = \frac{1-(-5)^{n+1}}{6}.$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n}(2^2)^k \times 2 = 2\sum_{k=0}^{n} 4^k = 2 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = -\frac{2}{3}\left(1-4^{n+1}\right) = \frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right).$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n}\frac{2k}{n} = \frac{2}{n} = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = n+1.$$

$$\begin{aligned}S_5 &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}3^k = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{-k}3^k = 2^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2^n\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} = 2^n\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\\ &= 2^n \times (-2) \times \left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right] = 2^{n+1}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right] = 2^{n+1}\left[\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right]\\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1}.\end{aligned}$$

$$S_6 = \sum_{k=2}^{n} 3^k = 3^2 \times \frac{1-3^{n-1}}{1-3} = 9 \times \frac{1-3^{n-1}}{-2} = \frac{9}{2}\left[3^{n-1}-1\right].$$

$S_7 = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$

$$\begin{aligned}
S_8 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{k^2 2^k}{2^k \times 2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \times 2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}
\end{aligned}$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} k2^{k-1}$. Le but de l'exercice est de calculer S.

Pour cela, on pose, pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$

1. Justifier que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer, pour tout réel $x > 1$, $f'(x)$ de deux manières différentes.

2. En déduire la valeur de S.

Solution.

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

D'autre part, pour tout réel $x > 1$,

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

2. On en déduit que, pour tout réel $x > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

En particulier, pour $x = 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} = n2^{n+1} - n2^n - 2^n + 1 = n(2^{n+1} - 2^n) - 2^n + 1).$$

Or, $2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = n2^n - 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

Exercice 14. Calculer les nombres suivants : **a.** $\binom{10}{9}$ **b.** $\binom{8}{2}$ **c.** $\binom{21}{21}$ **d.** $\binom{50}{48}$.

Solution.

a. $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$

b. $\binom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$

c. $\binom{21}{21} = 1$

d. $\binom{50}{48} = \binom{50}{2} = \dfrac{50 \times 49}{2} = 1\,225.$

Exercice 15. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, développer rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

a. $(1+x)^5$ **b.** $(1-x)^6$ **c.** $(x-y)^4$.

Solution. Grâce à la formule di binôme,

a. $(1+x)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 1^k x^{5-k} = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$

b. $(1-x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 1^k (-x)^{6-k} = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6.$

c. $(x-y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k y^{4-k} = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, puis en déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Solution. Par définition,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Or, $n - k = (n-1) - (k-1)$ donc

$$k\binom{n}{k} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$$

Exercice 17. Soit un entier $n \geqslant 2$. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k \qquad S_3 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^{n-k}}.$$

Solution.

$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} = (3+2)^n = 5^n.$

$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k 1^{n-k} = (5+1)^n = 6^n$

$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 3^0 - \binom{n}{1} 3^1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} - 1 - 3n = (3+1)^n - 1 - 3n = 4^n - 1 - 3n.$

$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ et $D_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer S_n

2. Exprimer S_n en faisant intervenir T_n et D_n.

3. Rappeler une expression, sans symbole somme, de D_n puis en déduire une expression sans symbole somme, de T_n

Solution.

1. La somme S_n est téléscopique donc

$$S_n = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(k+1)^4 - k^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 4T_n + 4D_n + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= 4T_n + 6D_n + 2n(n+1) + n + 1 \\ &= 4T_n + 6D_n + (2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

3. Par propriété, $D_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 4T_n + n(n+1)(2n+1) + (2n+1)(n+1) \\ &= 4T_n + (2n+1)(n+1)(n+1) \\ &= 4T_n + (2n+1)(n+1)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - (2n+1)(n+1)^2\right] = \frac{(n+1)^2}{4}\left[(n+1)^2 - 2n - 1\right] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 1\right] = \frac{(n+1)^2}{4} \times n^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice 19. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Solution. Pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $k! \leqslant n!$ donc

$$\sum k = 0^n k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!.$$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Solution. On remarque que, pour tout entier k, $k = (k+1) - 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{(k+1)k} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!} \right).
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme téléscopique donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = -\left(\frac{1}{(n+1)!} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$