⧫ Corrigés des exercices du chapitre 4

Exercice 1. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. L'ensemble des entiers naturels qui sont pairs.

2. L'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls.

3. L'ensemble des entiers naturels qui sont la somme de deux carrés d'entiers naturels.

4. L'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 3.

Solution.

1. L'ensemble des entiers pairs peut s'écrire en compréhension $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2k\}$ ou encore $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. L'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls peut s'écrire en compréhension sous la forme $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x = \frac{1}{n}\}$ ou encore $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

3. L'ensemble des entiers naturels qui sont la somme de deux carrés d'entiers naturels peut s'écrire $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\,(a\,;b) \in \mathbb{N}^*,\ x = a^2 + b^2\}$ ou encore $\{a^2 + b^2 \mid (a\,;b) \in \mathbb{N}^2\}$.

4. L'ensemble des fractions d'netiers dont le numérateur est une puissance de 3 peut s'écrire $\{\frac{a}{3^n} \mid a \in$ et $n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et les parties $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, c, d, f, g\}$ de E.

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Solution. $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$, $A \cap B = \{a, c, d\}$, $\overline{A} = \{e, f, g\}$, $\overline{B} = \{b, e\}$, $\overline{A \cup B} = \{e\}$ et $\overline{A \cap B} = \{a, c, d, f, g\}$.

Exercice 3. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$ et les ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{a, 3, e, 1\}$.

1. Écrire les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.

2. Compléter avec le symbole $\in$ ou le symbole $\notin$.

$$a \notin A \cap B \qquad a \in A \cap C \qquad a \in B \cup C \qquad 1 \in A \cup C \qquad 1 \notin A \cap C$$

$$a \notin \overline{A} \qquad a \in \overline{B} \qquad b \notin B \cap \overline{C} \qquad e \in \overline{B} \cup \overline{C} \qquad e \notin \overline{B} \cap \overline{C}$$

Solution.

1. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\} = E$ et $A \cap B = \varnothing$.

2. Voir ci-dessus.

Exercice 4. On considère deux parties A et B d'un ensemble E. Simplifier les écritures suivantes.

1. $\overline{\overline{A}}$ **2.** $\overline{A \cap \overline{B}}$ 3. $\overline{\overline{A} \cup B}$.

Solution.

1. Par définition, $\overline{\overline{A}}$ est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans $\overline{A}$ donc $\overline{\overline{A}} = A$.

2. Par les lois de de Morgan, $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$;

3. De même, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$.

Exercice 5. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Est-il vrai ou faux que $A \cap B \subset A \cup B$?

2. Est-il possible que $A \cap B = A \cup B$?

Solution.

1. C'est vrai. En effet, si $x \in A \cap B$ alors, en particulier, $x \in A$ donc $x \in A \cup B$. Ainsi, $A \cap B \subset A \cup B$.

2. Cela est possible si et seulement si $A = B$. En effet, supposons que $A \cap B = A \cup B$. Soit $a \in A$. Alors, $a \in A \cup B$ donc $a \in A \cap B$ et ainsi $a \in B$. On a donc montré que $A \subset B$. De la même manière, on montre que $B \subset A$ et donc $A = B$.
Réciproquement, si $A = B$ alors $A \cap B = A = A \cup B$ donc on a bien égalité.

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B et C des parties de E. Montrer que :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. $(A \cap B)^c \setminus C = (C^c \setminus B) \cup (C^c \setminus A)$.

3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C$.

Solution.

1. Par les propriétés du cours,

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A \setminus (B \cup C)$$

2. Par les propriétés du cours,

$$(A \cap B)^c \setminus C = (A^c \cup B^c) \cap C^c = (A^c \cap C^c) \cup (B^c \cap C^c) = (C^c \cap A^c) \cup (C^c \cap B^c) = (C^c \setminus A) \cup (C^c \setminus B)$$

3. Par les propriétés du cours,

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

4. Supposons que $A \cup B = B \cup C$. Soit $x \in A$. Alors, $x \in A \cup B$ donc $x \in B \cap C$ donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$. De même, si $x \in B$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in B \cap C$ et ainsi $x \in C$. On conclut donc que $A \subset B \subset C$.
Réciproquement, supposons que $A \subset B \subset C$. Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$. Alors, comme $A \subset B$, $x \in B$ et, comme $B \subset C$, $x \in C$. Ainsi, $x \in B \cup C$. Sinon, $x \in B$ et, comme précédemment, $x \in C$ donc $x \in B \cap C$. Dans tous les cas $x \in B \cap C$ donc $A \cup B \subset B \cap C$. Inversement, soit $x \in B \cap C$. Alors, $x \in B$ donc $x \in A \cup B$ et ainsi $B \cap C \subset A \cup B$. Par le principe de double-inclusion, on conclut que $A \cup B = B \cap C$.
On a donc montré que $A \cup B = B \cap C$ si et seulement si $A \subset B \subset C$.

Exercice 7.

1. Déterminer l'image directe de $[2\,;5]$ par la fonction affine $f : x \longmapsto -2x + 1$.

2. Déterminer l'image directe de $]-3\,;2]$ par la fonction carré $g : x \longmapsto x^2$.

3. Déterminer l'image directe de $]-3\,;2]$ par la fonction cube $h : x \longmapsto x^3$.

4. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction exp et par la fonction ln.

Solution.

1. Soit $x \in [2\,;5]$. Alors, $2 \leqslant x \leqslant 5$ donc, comme $-2 < 0$, $-4 \geqslant -2x \geqslant -10$ et ainsi $-3 \geqslant -2x+1 \geqslant -9$. L'image directe de $[2\,;5]$ par f est $[-9\,;-3]$.
2. Suu $]-3\,;0]$, g est décroissante donc si $x \in]-3\,;0]$, $(-3)^2 > x^2 \geqslant 0^2$ c'est-à-dire $0 \leqslant x^2 < 9$ et sur $[0\,;2]$ g est croissante donc si $x \in [0\,;2]$, $0^2 \leqslant x^2 \leqslant 2^2$ c'est-à-dire $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Ainsi, l'image directe de $]-3\,;2]$ par g est $[0\,;9[\cup [0\,;4] = [0\,;9[$.
3. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc si $x \in]-3\,;2]$ alors $x^3\,](-3)^2\,;2^3]$. Ainsi, l'image directe de $]-3\,;2]$ par h est $]-27\,;8]$.
4. Par propriétés des fonctions exp et ln, on a $\exp(\mathbb{R}_+^*) =]1\,;+\infty[$ et $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Croissance de l'image directe)**.** Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

Solution. Soit $y \in f(A)$. Alors, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, comme $A \subset A'$, $x \in A'$ donc $y = f(x) \in f(A')$. Ainsi, $f(A) \subset f(A')$.

Exercice 9 (Image directe d'union et d'intersection)**.** Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
2. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Donner un exemple qui montre qu'il n'y a pas toujours égalité.

Solution. Soit A et A' des parties de E et B et B' des parties de F.

1. Pour tout $y \in F$,
$$\begin{aligned} y \in f(A \cup A') &\iff \exists x \in A \cup A',\ y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A,\ y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in A',\ y = f(x)) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(A'). \end{aligned}$$
Ainsi, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
2. Soit $y \in f(A \cap A')$. Alors, il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y \in f(A)$ et comme $x \in A'$, $y \in f(A')$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(A')$. On conclut que $f(A \cap A') \subset f(A) \cup f(A')$.
Considérons la fonction carré $f : x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $A = \{-1\}$ et $A' = \{1\}$. Alors, $A \cap A' = \varnothing$ donc $f(A \cap A') = \varnothing$ mais $f(A) = \{1\}$ et $f(A') = \{1\}$ donc $f(A) \cap f(A') = \{1\}$. Ainsi, pour cet exemple, $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer une expression de ces deux applications.
2. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Solution.

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 0$ donc $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x}^2 + 1 = x + 1$.

2. On ne peut pas avoir $f \circ g = g \circ f$ car ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition. Par ailleurs, même sur l'intersection de leurs ensembles de définition elles ne sont pas égales car, par exemple, $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = \sqrt{2}$.

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Justifier que $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et calculer, pour tout $x \geqslant 0$, $(f \circ f)(x)$.

2. Même question avec $f \circ f \circ f$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $f^{\circ n}$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Solution.

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc $f(x)$ appartient à l'ensemble de définition de f. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+(x+1)}{x+1}} = \frac{x}{x+1} \times \frac{x+1}{2x+1} = \frac{x}{2x+1}.$$

2. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $f \circ f$ aussi et ainsi $f \circ f \circ f$ est bien définie et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) &= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} \\ &= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+(2x+1)}{2x+1}} = \frac{x}{2x+1} \times \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{x}{3x+1}\end{aligned}$$

3. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$, $f^{\circ n}(x) = \frac{x}{nx+1}$. Montrons-le par récurrence.

Pour $n = 1$, c'est vrai par définition de f (car $f^{\circ 1} = f$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f^{\circ n}(x) = \frac{x}{nx+1}$. Alors, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}f^{\circ(n+1)}(x) = f(f^{\circ n})(x) = f\left(\frac{x}{nx+1}\right) &= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} \\ &= \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+(nx+1)}{nx+1}} = \frac{x}{nx+1} \times \frac{nx+1}{(n+1)x+1} = \frac{x}{(n+1)x+1}\end{aligned}$$

donc l'égalité est établie au rang $n+1$.

Ainsi, on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \geqslant 0$, $f^{\circ n}(x) = \frac{x}{nx+1}$.

Exercice 12. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x-y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;xy) \end{array}$$

Solution.

1. Soit $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$f((x\,;y)) = (a\,;b) \iff \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)+(x-y)=a+b \\ (x+y)-(x-y)=a-b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x=a+b \\ 2y=a-b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple $(x\,;y)$ tel que $f((x\,;y)) = (a\,;b)$ donc f est bijective.

2. On peut remarquer que $f((0\,;1)) = f((1\,;0)) = (1\,;0)$ donc f n'est pas injective. De plus, $(0,1)$ n'a pas d'antécédent par f car si $x+y=0$ et $xy=1$ alors $y=-x$ donc $xy=-x^2 \leqslant 0$ donc $xy \neq 1$. Ainsi, f n'est pas surjective.
Ainsi, f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 13. On considère les fonctions f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ n-1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Les fonctions f et g sont-elles bijectives ?

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $g(f(n)) = g(n+1)$ et, comme $n+1>0$, $g(f(n)) = (n+1)-1 = n$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Les fonctions f et g ne sont pas bijectives. En effet, f n'est pas surjective car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n+1 > 0$ donc 0 n'a pas d'antécédent par f et $g(0) = g(1) = 0$ donc g n'est pas injective.

Exercice 14. On considère les fonctions f et g suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

1. Calculer, pour tout réel $x \neq 2$, $(g \circ f)(x)$ et, pour tout réel $x \neq 1$, $(f \circ g)(x)$.
2. Que peut-on déduire de la question précédente ?

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Alors

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{2\times\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-1} = \frac{\frac{2(x+1)+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-(x-2)}{x-2}} = \frac{2x+2+x-2}{x+1-x+2} = \frac{3x}{3} = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{\frac{2x+1}{x-1}+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2} = \frac{\frac{2x+1+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}} = \frac{3x}{2x+1-2x+2} = \frac{3x}{3} = x.$$

2. D'après la question précédente, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$ donc, par propriété, f et g sont des bijections réciproques.

Exercice 15.

1. Montrer que l'application $f : x \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer f^{-1}.
2. Même question avec $g : x \longmapsto x^2 + x$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
3. Même question avec $h : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ réalise une bijection de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $1+\mathrm{e}^x > 1$ et, par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) > \ln(1)$ i.e. $f(x) > 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}\, f \subset\,]0\,;+\infty[$.
   Soit un réel $y > 0$. Alors, pour tout réel x,
$$f(x) = y \Longleftrightarrow \ln(1 + \mathrm{e}^x) = y \Longleftrightarrow 1 + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - 1$$
   et, comme $y > 0$, $\mathrm{e}^y > 1$ donc $\mathrm{e}^y - 1 > 0$, donc
$$f(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln(\mathrm{e}^y - 1).$$
   Ainsi, f est bijective et sa bijection réciproque est
$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\mathrm{e}^x - 1) \end{array}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, x^2 et x sont positifs donc $x^2 + x \geqslant 0$ et ainsi $\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}_+$.
   Soit un réel $y \geqslant 0$. Alors,
$$g(x) = y \Longleftrightarrow x^2 + x = y \Longleftrightarrow x^2 + x - y = 0.$$
   Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-y) = 1 + 4y > 0$ car $y \geqslant 0$ donc elle possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$. Or, clairement, $x_1 < 0$ et, comme $1 + 4y \geqslant 1$, par croissance de la racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{1+4y} \geqslant \sqrt{1} = 1$ donc $x_2 \geqslant 0$. Ainsi, x_2 est l'unique antécédent de y par g. On en déduit que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est
$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} \end{array}$$

3. Soit $y \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. Alors, pour tout $x \in [-1\,;1]$,
$$h(x) = y \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = y \Longleftrightarrow x = y(x^2 + 1) \Longleftrightarrow yx^2 - x + y = 0$$
   Si $y = 0$, cette dernière équation devient $-x = 0$ i.e. $x = 0$.
   Si $y \neq 0$ alors $yx^2 - x + y = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4y^2 = 1 - (2y)^2$. Si $y = \frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{2}$ alors $\Delta = 0$ donc l'équation a une unique solution réelle qui est $x = \frac{-(-1)}{2y} = \frac{1}{2y}$ i.e. $x = 1$ si $y = \frac{1}{2}$ et $x = -1$ si $y = -\frac{1}{2}$. Si $y \in \left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$, $\Delta > 0$ donc l'équation $yx^2 - x + y = 0$ possède deux solutions réelles :
$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{1-4y^2}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{1-4y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

Comme $0<|y|<\frac{1}{2}$, $0<2|y|<1$ donc $\frac{1}{2|y|}>1$ et, comme $1+\sqrt{1-4y^2}\geqslant 1$, $|x_2|>1$ donc $x_1 \notin [-1\,;1]$.
Remarquons, de plus, que, pour tout réel y tel que $0<|y|<\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} &= \frac{\left(1-\sqrt{1-4y^2}\right)\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)}{2y\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)} = \frac{1^2-\sqrt{1-4y^2}^2}{2y\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)}\\ &= \frac{1-(1-4y^2)}{2y\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)} = \frac{4y^2}{2y\left(1+\sqrt{1-4y^2}\right)} = \frac{2y}{1+\sqrt{1-4y^2}}\end{aligned}$$

et on constate que cette dernière expression est encore valable si $y=0$ ou $|y|=\frac{1}{2}$.
De plus, comme $1+\sqrt{1-4y^2}\geqslant 1$, $\left|\frac{2y}{1+\sqrt{1-4x^2}}\right| \leqslant |2y| \leqslant 1$ car $|y|\leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{2y}{1+\sqrt{1-4x^2}} \in [-1\,;1]$.
On conclut donc que tout réel $y \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ possède un unique antécédent par f égal à $\frac{2y}{1+\sqrt{1-4x^2}}$ donc h est bijective. De plus, la bijection réciproque de h est

$$h^{-1}: \begin{array}{ccc}\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1]\\ x & \longmapsto & \frac{2x}{1+\sqrt{1-4x^2}}\end{array}$$

Exercice 16. Montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si, pour toutes parties A et A' de E, $f(A\cap A') = f(A)\cap f(A')$.

Solution. Supposons que f est injective. Soit A et A' des parties de E. On sait que $f(A\cap A')\subset f(A)\cap f(A')$ (voir l'exercice 9, point 2.). Inversement, soit $y\in f(A)\cap f(A')$. Alors, $y\in f(A)$ et $y \in f(A')$ donc il existe $x\in A$ et $x'\in A'$ tel que $y=f(x)=f(x')$. Or, comme f est injective, $x=x'$ donc $x\in A\cap A'$ et donc $y\in f(A\cap A')$. Ainsi, $f(A)\cap f(A')\subset f(A\cap A')$ et, par le principe de double inclusion, $f(A\cap A')=f(A)\cap f(A')$.

Réciproquement, supposons que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A\cap A')=f(A)\cap f(A')$. Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x)=f(x')$. Posons $y=f(x)$. Alors, $y\in f(\{x\})\cap f(\{x'\})$ donc, grâce l'hypothèse sur f, $y \in f(\{x\}\cap\{x'\})$. Ainsi, $f(\{x\}\cap\{x'\})\neq\varnothing$ et donc $\{x\}\cap\{x'\}\neq\varnothing$. Soit $s\in\{x\}\cap\{x'\}$. Alors, $s\in\{x\}$ donc $s=x$ et $s\in\{x'\}$ donc $s=x'$. On en déduit que $x=x'$ donc f est injective.

Ainsi, on a bien montré qu'une application $f : E\longrightarrow F$ est injective si et seulement si, pour toutes parties A et A' de E, $f(A\cap A')=f(A)\cap f(A')$.

Exercice 17. Soit $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f aussi et donner un exemple qui montre que g ne l'est pas forcément.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g aussi et donner un exemple qui montre que f ne l'est pas forcément.
3. Que peut-on dire de f et g si $g\circ f$ est bijective ?

Solution.

1. Supposons que $g\circ f$ est injective. Soit x et x' des éléments de E tels que $f(x)=f(x')$. Alors, $g(f(x))=g(f(x'))$ i.e. $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$. Or, $g\circ f$ est injective donc $x=x'$ et ainsi f est injective. Un exemple montrant que g n'est pas nécessairement injective est donné dans l'exercice 13.

2. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Alors, comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Posons $y = f(x) \in F$. Alors, $g(y) = z$ ce qui prouve que g est surjective. Un exemple montrant que f n'est pas nécessairement surjective est donné dans l'exercice 13.

3. Si $g \circ f$ est bijective, on peut seulement dire que g est surjective et f est injective. C'est vrai d'après les questions précédentes et l'exercice 13 montre qu'on ne peut pas dire mieux.

Exercice 18. Soit une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Solution. Supposons que f est injective. Soit $y \in E$. Alors, $f(y) = (f \circ f \circ f)(y)$ i.e. $f(y) = f(f(f(y)))$. Posons $x = f(y) \in E$. Alors, $f(y) = f(f(x))$ donc, comme f est injective, $y = f(x)$ ce qui montre que f est surjective puisque x est un antécédent de y par f.

Réciproquement, supposons que f est surjective. Soit x et x' des éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, il existe y et y' dans E tels que $x = f(y)$ et $x' = f(y')$. Alors,

$$x = f(y) = f(f(f(y))) = f(f(x)) = f(f(x')) = f(f(f(y'))) = f(y') = x'$$

donc f est injective.

Exercice 19. Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f(A^c) = f(A)^c$.

Solution. Supposons que f est bijective. Soit A un partie de E. Soit $y \in f(A^c)$. Ainsi, il existe $x \in A^c$ tel que $y = f(x)$. Soit $x' \in A$. Alors, $x \neq x'$ car $x \in A^c$ donc, comme f est injective, $f(x) \neq f(x')$ i.e. $y \neq f(x')$. Ainsi, pour tout $x' \in A$, $y \neq f(x')$ donc $y \notin f(A)$ i.e. $y \in f(A)^c$. On a donc montré que $f(A^c) \subset f(A)^c$. Inversement, soit $y \in f(A)^c$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ ce qui est exclu. Ainsi, $x \in A^c$ et donc $y \in f(A^c)$ ce qui prouve que $f(A)^c \subset f(A^c)$. Par le principe de double inclusion, on conclut que $f(A^c) = f(A)^c$.

Réciproquement, supposons que, pour toute partie A de E, $f(A^c) = f(A)^c$. Soit x et x' des éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Posons $y = f(x)$ et $A = \{x\}^c$. Alors, $A^c = \{x\}$ donc $y = f(x) \in f(A^c)$. Par hypothèse, on a donc $y \in f(A)^c$. Or, $y = f(x')$ donc $f(x') \in f(A)^c$ donc $x' \notin A$ i.e. $x' \in A^c = \{x\}$ donc $x' = x$. Ainsi, f est injective. De plus, en appliquant l'hypothèse avec $A = \varnothing$, on a $f(E) = f(\varnothing^c) = f(\varnothing)^c = \varnothing^c = F$ donc f est surjective et on conclut que f est bijective.

On a donc montré que f est bijective si et seulement si, pour tout partie A de E, $f(A^c) = f(A)^c$.