♦ Corrigés des exercices du chapitre 3

Exercice 1. Soit x et y deux réels strictement positifs. Dans chaque cas, comparer A et B.

1) $A = (x+y)^2$ et $B = x^2 + y^2$ 2) $A = x + y$ et $B = \dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ 3) $A = \dfrac{x+y}{2}$ et $B = \sqrt{xy}$

Solution.
1) $A - B = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$ donc, comme x et y sont strictement positifs, $A - B > 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{A > B}$.
2) $A - B = x + y - \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = x + y - \frac{2}{\frac{y+x}{xy}} = x + y - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2-2xy}{x+y} = \frac{x^2+2xy+y^2-2xy}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ donc, comme x et y sont strictement positifs, $A - B > 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{A > B}$.
3) $A - B = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$ donc $A - B \geqslant 0$. Ainsi, on conclut que $\boxed{A \geqslant B}$.

Exercice 2. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Solution. Soit un réel $x > 0$. Alors,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{x^2-2x+1^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$$

car $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$.
On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2}$.

Exercice 3. Soit x un réel tel que $x > 1$ et $x \leqslant 3$.

1. Traduire l'énoncé sous la forme $x \in \ldots$ en remplaçant les pointillés par un intervalle.

2. Donner un encadrement de :

a) $x + 5$ **b)** $x - 2$ **c)** $2x$ **d)** $-x$ **e)** $\dfrac{x}{4}$ **f)** $-\dfrac{x}{2}$.

Solution.

1. Les deux inégalités $x > 1$ et $x \leqslant 3$ se traduisent par $\boxed{x \in]1\,;3]}$.

2. a) Comme $1 < x \leqslant 3$, $1 + 5 < x + 5 \leqslant 3 + 5$ donc $\boxed{6 < x + 5 \leqslant 8}$.
b) Comme $1 < x \leqslant 3$, $1 - 2 < x - 2 \leqslant 3 - 2$ donc $\boxed{-1 < x - 2 \leqslant 1}$.
c) Comme $1 < x \leqslant 3$ et comme $2 > 0$, $2 \times 1 < 2 \times x \leqslant 2 \times 3$ donc $\boxed{2 < 2x \leqslant 6}$.
d) Comme $1 < x \leqslant 3$ et comme $-1 < 0$, $(-1) \times 1 > (-1) \times x \geqslant (-1) \times 3$ donc $\boxed{-1 > 2x \geqslant -3}$.
e) Comme $1 < x \leqslant 3$ et comme $4 > 0$, $\boxed{\frac{1}{4} < \frac{x}{4} \leqslant \frac{3}{4}}$.
f) Comme $1 < x \leqslant 3$ et comme $-2 < 0$, $\frac{1}{-2} > \frac{x}{-2} \geqslant \frac{3}{-2}$ donc $\boxed{-\frac{1}{2} > -\frac{x}{2} \geqslant -\frac{3}{2}}$.

Exercice 4. Soit x et y deux réels tels que $x \in [2\,;7]$ et $y \in [4\,;5]$.
Donner une encadrement de :

1. $x + y$;
2. xy ;
3. $2x + 4y$;
4. $x - y$;
5. $3y - 2x$;
6. $(2y - x)(3x - y)$.

Solution.

1. Comme $2 \leqslant x \leqslant 7$ et $4 \leqslant y \leqslant 5$, $2 + 4 \leqslant x + y \leqslant 7 + 5$ donc $\boxed{6 \leqslant x + y \leqslant 12}$.

2. Comme tous les nombres en jeux sont positifs, on peut multiplier les inégalités membre à membre donc $2\times 4 \leqslant x\times y \leqslant 7\times 5$ c'est-à-dire $\boxed{8 \leqslant xy \leqslant 35}$.

3. Comme $2 \leqslant x \leqslant 7$ et comme $2>0$, $4 \leqslant 2x \leqslant 14$. De même, comme $4 \leqslant y \leqslant 5$ et $4>0$, $16 \leqslant 4y \leqslant 20$. Ainsi, en ajoutant membre à membre les deux inégalités, il vient $\boxed{20 \leqslant 2x+4y \leqslant 34}$.

4. D'une part, [*] $2 \leqslant x \leqslant 7$. D'autre part, comme $4 \leqslant y \leqslant 5$, en multipliant par -1, $-4 \geqslant -y \geqslant -5$ c'est-à-dire [**] $-5 \leqslant -y \leqslant -4$. En sommant membre à membre les deux inégalités [*] et [**], il vient $2+(-5) \leqslant x+(-y) \leqslant 7+(-4)$ c'est-à-dire $\boxed{-3 \leqslant x-y \leqslant 3}$.

5. Comme $4 \leqslant y \leqslant 5$ et comme $3>0$, $12 \leqslant 3y \leqslant 15$. D'autre part, comme $2 \leqslant x \leqslant 7$ et $-2<0$, $-4 \geqslant -2x \geqslant -14$ c'est-à-dire $-14 \leqslant -2x \leqslant -4$. En sommant membre à membre les deux inégalités, il vient $12+(-14) \leqslant 3y+(-2x) \leqslant 15+(-4)$ c'est-à-dire $\boxed{-2 \leqslant 3y-2x \leqslant 11}$.

6. Comme $4 \leqslant y \leqslant 5$ et $2>0$, $8 \leqslant 2y \leqslant 10$. De plus, comme $2 \leqslant x \leqslant 7$, en multipliant par -1, $-2 \geqslant -x \geqslant -7$ c'est-à-dire $-7 \leqslant -x \leqslant -2$. En additionnant membre à membre, on obtient [*] $1 \leqslant 2y-x \leqslant 8$.
De même, comme $2 \leqslant x \leqslant 7$ et comme $3>0$, $6 \leqslant 3x \leqslant 21$. D'autre part, comme $4 \leqslant y \leqslant 5$ et comme $-1<0$, $-4 \geqslant -y \geqslant -5$ c'est-à-dire $-5 \leqslant -y \leqslant -4$. En sommant membre à membre, on obtient [**] $1 \leqslant 3x-y \leqslant 17$. Comme [*] et [**] ne portent que sur des nombres positifs, on peut les multiplier membre à membre et on obtient $\boxed{1 \leqslant (2y-x)(3x-y) \leqslant 136}$.

Exercice 5. Calculer les nombres suivants.

$$A=|3| \qquad B=|-5| \qquad C=\left|1-\sqrt{2}\right| \qquad D=|17-25| \qquad E=|-3-\pi| \qquad F=\left|10^{-4}\right|.$$

Solution.
Comme $3>0$, $\boxed{A=5}$.
Comme $-5<0$, $B=-(-5)$ i.e. $\boxed{B=5}$.
Comme $1-\sqrt{2}<0$, $C=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ i.e. $\boxed{C=\sqrt{2}-1}$.
Comme $17-25=-8<0$, $D=-(-8)$ i.e. $\boxed{D=8}$.
Comme $-3-\pi<0$, $E=-(-3-\pi)$ i.e. $\boxed{E=3+\pi}$.
Comme $10^{-4}>0$, $\boxed{F=10^{-4}}$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, calculer la distance entre x et y.

$$1)\ x=-1 \text{ et } y=3 \qquad 2)\ x=\sqrt{3} \text{ et } y=-1 \qquad 3)\ x=\frac{1}{3} \text{ et } y=4 \qquad 4)\ x=3 \text{ et } y=\pi.$$

Solution.
1) $|x-y|=|-1-3|=|-4|=-(-4)$ donc $\boxed{\text{la distance entre } x \text{ et } y \text{ est } 4.}$
2) $|x-y|=\left|\sqrt{3}-(-1)\right|=\left|\sqrt{3}+1\right|$ donc $\boxed{\text{la distance entre } x \text{ et } y \text{ est } \sqrt{3}+1}$.
3) $|x-y|=\left|\frac{1}{3}-4\right|=\left|\frac{1-12}{4}\right|=\left|-\frac{11}{4}\right|$ donc $\boxed{\text{la distance entre } x \text{ et } y \text{ est } \frac{11}{4}}$.
4) $|x-y|=|3-\pi|=-(3-\pi)=-3+\pi$ donc $\boxed{\text{la distance entre } x \text{ et } y \text{ est } \pi-3}$.

Exercice 7. Les propositions suivants sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera sa réponse.

1. Pour tout réel x, $|1+x^2|=1+x^2$.

2. Pour tous réels x et y, $|x+y|=|x|+|y|$.

3. Il existe des réels x et y tels que $|x+y|=|x|+|y|$.

4. Pour tous réels positifs ou nuls x et y, $|x+y| = |x| + |y|$.
5. Il existe un réel x tel que $|-x^2| = -x^2$.

Solution.

1. La proposition est vraie car, pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ donc $|1 + x^2| = 1 + x^2$.
2. La proposition est fausse. Par exemple, pour $x = 1$ et $y = -1$, $|x + y| = |1 - 1| = |0| = 0$ alors que $|x| + |y| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$.
3. La proposition est vraie. Par exemple, pour $x = y = 0$, $|x + y| = |0| = 0$ et $|x| + |y| = 0 + 0 = 0$.
4. La proposition est vraie. Soit x et y deux réels positifs ou nuls. Alors, $x + y$ est positif ou nul donc $|x + y| = x + y$. Or, comme x et y sont positifs, $x = |x|$ et $y = |y|$ donc $|x + y| = |x| + |y|$.
5. La proposition est vraie. Pour $x = 0$, $|-0^2| = |0| = 0 = -0^2$.

Exercice 8. Soit x et y deux réels. Montrer que le minimum de x et de y est égal à $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ et que le maximum de x et de y est égal à $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.

Solution. On raisonne par disjonction des cas.

1er cas. Supposons que $x < y$. Alors, le minimum des deux nombres est x et le maximum est y. Or, comme $x < y$, $x - y < 0$ donc $|x - y| = -(x - y) = y - x$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(y-x)) = \frac{1}{2}(x+y-y+x) = x$$

et

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(y-x)) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y.$$

Ainsi, $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ est bien égal au minimum de x et y et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ est bien égal au maximum de x et y.

2e cas. Supposons que $x \geqslant y$. Alors, le minimum des deux nombres est y et le maximum est x. Or, comme $x \geqslant y$, $x - y \geqslant 0$ donc $|x - y| = x - y$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y$$

et

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+(x-y)) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x.$$

Ainsi, $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ est bien égal au minimum de x et y et $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ est bien égal au maximum de x et y.

On conclut que, dans tous les cas, $\boxed{\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) \text{ est égal au minimum de } x \text{ et } y}$ et $\boxed{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \text{ est bien égal au maximum de } x \text{ et } y}$.

Exercice 9. Soit x et y deux réels. Montrer que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Solution. Remarquons que x peut s'écrire $x = (x - y) + y$. Dès lors, d'après l'inégalité triangulaire, $|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

Ce qui précède est valable pour tous réels x et y donc, en échangeant les rôles de x et de y, on obtient $|y| - |x| \leqslant |y - x|$. Or, $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$ donc $|y| - |x| \leqslant |x - y|$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $||x| - |y||$ est égal, par définition, à $|x| - |y|$ ou à $|y| - |x|$ donc, comme ces deux nombres sont tous les deux inférieurs à $|x - y|$, on conclut que, $\boxed{\text{pour tous réels } x \text{ et } y,\ ||x| - |y|| \leqslant |x - y|}$.

Exercice 10. Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1. $4 \in \,]-\infty\,;-1] \cup \,]0\,;+\infty[$.
2. $4 \notin \,]-\infty\,;-1] \cap [0\,;+\infty[$.
3. $-1 \in \,]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$.
4. $-1 \notin \,]-\infty\,;-1] \cap [0\,;+\infty[$.
5. $0 \in \,]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$.
6. $0 \notin \,]-\infty\,;-1] \cap [0\,;+\infty[$.
7. $4 \in \,]-2\,;3] \cup \,]1\,;5]$.
8. $4 \notin \,]-2\,;3] \cap \,]1\,;5]$.
9. $3 \in \,]-2\,;3] \cup \,]1\,;5]$.
10. $3 \in \,]-2\,;3] \cap \,]1\,;5]$.
11. $1 \notin \,]-2\,;3] \cup \,]1\,;5]$.
12. $1 \notin s\,]-2\,;3] \cap \,]1\,;5]$.

Solution. Voir ci-dessus.

Exercice 11. Dans chaque cas, écrire E comme un intervalle ou comme une union d'intervalles.

1. E est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 1$ et $0 \leqslant x < 4$.
2. $E = [5\,;8] \cap \,]3\,;6[$.
3. E est l'ensemble des réels x tels que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.
4. E est l'ensemble des réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $0 < x < 2$.
5. E est l'ensemble des réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ ou $0 < x < 2$.
6. E est l'ensemble des réels x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2$ ou $-2 < x < -1$.

Solution.

1. $E = [1\,;4[$.
2. $E = [5\,;6[$.
3. $E = \,]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$.
4. $E = [1\,;2[$.
5. $E = \,]0\,;3]$.
6. $E = \,]-2\,;-1[\cup [1\,;2]$.

Exercice 12. Vérifier que $2+\sqrt{6}$ est solution de l'équation $x^2 - 4x = 2$.

Solution. Étant donné que

$$(2+\sqrt{6})^2 - 4(2+\sqrt{6}) = 2^2 + 2\times 2\times\sqrt{6} + \sqrt{6}^2 - 8 - 4\sqrt{6} = 4 + 4\sqrt{6} + 6 - 8 - 4\sqrt{6} = 2,$$

$\boxed{2+\sqrt{6} \text{ est solution de l'équation } x^2 - 4x = 2}$.

Exercice 13. — On considère l'équation

$$(E) : \ \frac{3x+1}{5} - 2x + 1 = 3 + 4x.$$

Compléter le raisonnement suivant en indiquant entre parenthèses l'opération effectuée pour passer d'une équation à l'autre (par exemple : on a divisé par 3, on a additionné 2, etc...)

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{3x+1}{5} - 2x + 1 - (3+4x) = 0 && \text{(On a soustrait } 3+4x\text{)}\\
&\iff \frac{3x+1}{5} - 2x + 1 - 3 - 4x = 0 &&\\
&\iff \frac{3x+1}{5} - 6x - 2 = 0 &&\\
&\iff 3x + 1 - 30x - 10 = 0 && \text{(On a multiplié par } 5 \neq 0\text{)}\\
&\iff -27x - 9 = 0 &&\\
&\iff -27x = 9 && \text{(On a additionné 9)}\\
&\iff x = -\tfrac{9}{27} && \text{(On a divisé par } -27 \neq 0\text{)}\\
&\iff x = -\tfrac{1}{3} &&
\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $\{-\frac{1}{3}\}$.

Exercice 14. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) :\ 3x = 0 \qquad (E_2) :\ 5x = 1 \qquad (E_3) :\ 3 - 2x = 5 \qquad (E_4) :\ 1 - x = 4x + 7$$

$$(E_5) :\ 0{,}3x + 0{,}01 = 2{,}7 - 3{,}1x \qquad (E_6) :\ \frac{2}{3}x = 5 \qquad (E_7)\ \frac{7}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x + 1$$

Solution.

$(E_1) \iff \dfrac{3x}{3} = \dfrac{0}{3} \iff x = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_1) \text{ est } \{0\}}$.

$(E_2) \iff \dfrac{5x}{5} = \dfrac{1}{5} \iff x = \dfrac{1}{5}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_2) \text{ est } \left\{\dfrac{1}{5}\right\}.}$

$(E_3) \iff 3 - 2x - 3 = 5 - 3 \iff -2x = 2 \iff \dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{2}{-2} \iff x = -1$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \{-1\}.}$

$(E_4) \iff 1 - x + x = 4x + 7 + x \iff 1 = 5x + 7 \iff 1 - 7 = 5x + 7 - 7 \iff -6 = 5x$

$\iff \dfrac{-6}{5} = \dfrac{5x}{5} \iff -\dfrac{6}{5} = x$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_4) \text{ est } \left\{-\dfrac{6}{5}\right\}.}$

$(E_5) \iff 0{,}3x + 0{,}01 = 2{,}7 - 3{,}1x \iff 0{,}3x + 3{,}1x + 0{,}01 = 2{,}7 \iff 3{,}4x = 2{,}7 - 0{,}01$

$\iff 3{,}4x = 2{,}69 \iff x = \dfrac{2{,}69}{3{,}4} \iff x = \dfrac{269}{340}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_5) \text{ est } \left\{\dfrac{269}{340}\right\}.}$

$(E_6) \iff x = \dfrac{5}{\frac{2}{3}} \iff x = 5 \times \dfrac{3}{2} \iff x = \dfrac{15}{2}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_6) \text{ est } \left\{\dfrac{15}{2}\right\}.}$

$(E_7) \iff \dfrac{7}{5}x - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{3} = 1 \iff \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{4}\right)x = 1 + \dfrac{1}{3} \iff \left(\dfrac{28}{20} - \dfrac{15}{20}\right)x = \dfrac{3}{3} + \dfrac{1}{3}$

$\iff \dfrac{13}{20}x = \dfrac{4}{3} \iff x = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{20}} \iff x = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{20}{13} \iff x = \dfrac{80}{39}$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_7) \text{ est } \left\{\dfrac{80}{39}\right\}.}$

Exercice 15. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) :\ \frac{x-2}{2} + 2 = 2x \qquad (E_2) :\ \frac{2x+3}{4} + \frac{4-x}{3} = \frac{x+1}{2}$$

$$(E_3) :\ \frac{5-x}{7} + 0{,}3x = \frac{2}{5} \qquad (E_4) :\ \sqrt{3}x - 2 = x + 1$$

Solution.

$(E_1) \iff 2\left(\dfrac{x-2}{2} + 2\right) = 2 \times 2x \iff x - 2 + 4 = 4x \iff x + 2 = 4x \iff 2 = 4x - x$

$\iff 2 = 3x \iff \dfrac{2}{3} = x$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_1) \text{ est } \left\{\frac{2}{3}\right\}.}$$

$(E_2) \iff 12\left(\frac{2x+3}{4} + \frac{4-x}{3}\right) = 12 \times \frac{x+1}{2} \iff 3(2x+3) + 4(4-x) = 6(x+1)$
$\iff 6x + 9 + 16 - 4x = 6x + 6 \iff 2x + 25 = 6x + 6 \iff 25 = 6x + 6 - 2x$
$\iff 25 = 4x + 6 \iff 25 - 6 = 4x \iff 19 = 4x \iff \frac{19}{4} = x$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_2) \text{ est } \left\{\frac{19}{4}\right\}.}$$

$(E_3) \iff \frac{5-x}{7} + \frac{3}{10}x = \frac{2}{5} \iff 70\left(\frac{5-x}{7} + \frac{3}{10}x\right) = 70 \times \frac{2}{5} \iff 10(5-x) + 21x = 28$
$\iff 50 - 10x + 21x = 28 \iff 11x = 28 - 50 \iff x = \frac{-22}{11} \iff x = -2$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \{-2\}.}$$

$(E_4) \iff \sqrt{3}x - 2 = x + 1 \iff \sqrt{3}x - x - 2 = 1 \iff (\sqrt{3}-1)x - 2 = 1 \iff (\sqrt{3}-1)x = 1 + 2$
$\iff (\sqrt{3}-1)x = 3 \iff x = \frac{3}{\sqrt{3}-1} \iff x = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2 - 1^1} \iff x = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_4) \text{ est } \left\{\frac{3\sqrt{3}+3}{2}\right\}.}$$

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1): \ x(x+1) = x^2 + 3 \qquad (E_2): \ (2x+3)^2 - 4x^2 = 5x + 1$$

$$(E_3): \ x(1-3x) + 3x^2 = \frac{3-7x}{5} \qquad (E_4): \ (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$$

Solution.

$(E_1) \iff x^2 + x = x^2 + 3 \iff x^2 + x - x^2 = 3 \iff x = 3$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_1) \text{ est } \{3\}.}$$

$(E_2) \iff (2x+3)^2 - 4x^2 = 5x + 1 \iff (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - 4x^2 = 5x + 1$
$\iff 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 = 5x + 1 \iff 12x + 9 = 5x + 1 \iff 12x + 9 - 5x = 1$
$\iff 7x + 9 = 1 \iff 7x = 1 - 9 \iff 7x = -8 \iff x = -\frac{8}{7}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_2) \text{ est } \left\{-\frac{8}{7}\right\}.}$$

$(E_3) \iff 5\left(x(1-3x) + 3x^2\right) = 5 \times \frac{3-7x}{5} \iff 5x(1-3x) + 15x^2 = 3 - 7x$
$\iff 5x - 15x^2 + 15x^2 = 3 - 7x \iff 5x = 3 - 7x \iff 5x + 7x = 3$
$\iff 12x = 3 \iff x = \frac{3}{12} \iff x = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \left\{\frac{1}{4}\right\}.}$$

$(E_4) \iff (x+1)^2(x+1) = x^3 + 3x^2 + 5x - 2 \iff (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$
$\iff x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2 \iff x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$
$\iff x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 3x^2 - 5x = -2 \iff -2x + 1 = -2 \iff -2x = -2 - 1$
$\iff -2x = -3 \iff x = \frac{-3}{-2} \iff x = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \left\{\frac{3}{2}\right\}.}$$

Exercice 17. Étudier le signe des expressions suivantes en fonction de x :

$$A(x) = -3x+1 \qquad B(x) = 4+5x \qquad C(x) = (2x+6)(4-x) \qquad D(x) = 4x^2+1$$

$$E(x) = x^2-9 \qquad F(x) = x^3-2x^2 \qquad G(x) = x^3-x \qquad H(x) = x^3+x \qquad I(x) = \frac{2-3x}{x+1}$$

Solution.

• Comme $-3<0$, $\boxed{A(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right] \text{ et } A(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[}$.

• Comme $5>0$, $\boxed{B(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-\frac{4}{5}\right] \text{ et } B(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-\frac{4}{5}\,;+\infty\right[}$.

• Pour étudier le signe de $C(x)$, on utilise un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
signe de $2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{C(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-3\,;4] \text{ et } C(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-3] \cup [4\,;+\infty[}$.

• Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $4x^2 \geqslant 0$ et ainsi $\boxed{D(x) > 0}$.

• Pour tout réel x, $E(x) = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$ donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$-$	
signe de $E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{E(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[\text{ et } C(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-3\,;3]}$.

• Pour tout réel x, $F(x) = x^2(x-2)$ donc, comme $x^2 \geqslant 0$, le signe de $F(x)$ est le même que le signe de $x-2$. Ainsi, $\boxed{F(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;2] \text{ et } F(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [2\,;+\infty[}$.
(Remarque : $F(x)$ a le même signe de $x-2$ mais s'annule, de plus, en $x=0$.)

• Pour tout réel x, $G(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $G(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{G(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-1] \cup [0\,;1] \text{ et } G(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [-1\,;0] \cup [1\,;+\infty[}$.

• Pour tout réel x, $H(x) = x(x^2+1)$ et $x^2+1>0$ donc le signe de $H(x)$ est le signe de x.
Ainsi, $\boxed{H(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;0] \text{ et } H(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in]0\,;+\infty]}$.

• Pour le signe de $I(x)$, on utilise un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$-$	
signe de $I(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{I(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty\,;-1[\cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[\text{ et } I(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-1\,;\frac{2}{3}\right]}$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I) : (x+1)(x+2) > (x+2)(3-x)$ $\qquad$ $(J) : (x+1)^2 < (2x-3)^2$ $\qquad$ $(K) : 3x+1 \leqslant x(3x+1)$.

Solution.
$(I) \iff (x+1)(x+2)-(x+2)(3-x) > 0 \iff (x+2)[(x+1)-(3-x)] > 0$
$\iff (x+2)(2x-2) > 0$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+2)(2x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ est }]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[.}$

$(J) \iff (x+1)^2-(2x-3)^2 < 0 \iff [(x+1)-(2x-3)][(x+1)+(2x-3)] < 0$
$\iff (4-x)(3x-2) < 0$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
signe de $4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(4-x)(3x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (J) \text{ est } \left]\frac{2}{3}\,;4\right[.}$

$(K) \iff (3x+1)\times 1 - x(3x+1) \leqslant 0 \iff (3x+1)(1-x) \leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(3x+1)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions } (K) \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup [1\,;+\infty[.}$

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1) $|x-4| = 1$ **2)** $|x+5| = 5$ **3)** $|3x+2| > 5$ **4)** $|1-7x| < 2$ **5)** $|x| = |x+1|$

Solution.

1. $|x-4| = 1 \iff x-4 = 1$ ou $x-4 = -1 \iff x = 5$ ou $x = 3$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } |x-4| = 1 \text{ est } \{3\,;5\}.}$

2. $|x+5| = 5 \iff x+5 = 5$ ou $x+5 = -5 \iff x = 0$ ou $x = -10$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } |x+5| = 5 \text{ est } \{-10\,;0\}.}$

3. $|3x+2| > 5 \iff 3x+2 > 5$ ou $3x+2 < -5 \iff x = 1$ ou $x < -\frac{7}{3}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } |3x+2| > 5 \text{ est } \left]-\infty\,;-\frac{7}{3}\right[\cup]1\,;+\infty[.}$

4. $|1-7x| < 2 \iff -2 < 1-7x < 2 \iff -3 < -7x < 1 \iff \frac{3}{7} > x > -\frac{1}{7}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } |1-7x| < 2 \text{ est } \left]-\frac{1}{7}\,;\frac{3}{7}\right[.}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $|x|$ est la distance de x à 0 et $|x+1|$ est la distance de x à -1. Ainsi, $|x| = |x+1|$ si et seulement si x est à égale distance de 0 et -1 ce qui revient à dire que x est le centre de l'intervalle $[-1\,;0]$, soit $-\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } |x| = |x+1| \text{ est } \{-\frac{1}{2}\}.}$

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1) : 4x^2 - 9 = 0$ $(E_2) : 2(x-1)(x+2) = 0$ $(E_3) : x - 3x^2 = 0$ $(E_4) : x^2 + 6x + 9 = 0$

$(E_5) : x^2 - x - 6 = 0$ $(E_6) : 2x^2 + x - 3 = 0$ $(E_7) : 2x^2 + x + 3 = 0$ $(E_8) : -x^2 + 2x + 1 = 0$

Solution.

• $(E_1) \iff (2x)^2 - 3^2 = 0 \iff (2x-3)(2x+3) = 0 \iff 2x - 3 = 0$ ou $2x + 3 = 0$
$\iff x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\}.}$

• $(E_2) \iff (x-1)(x+2) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{-2\,;1\}.}$

• $(E_3) \iff x(1-3x) = 0 \iff x = 0$ ou $1 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{0\,;\frac{1}{3}\}.}$

• $(E_4) \iff (x+3)^2 = 0 \iff x+3=0 \iff x=-3$.
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-3\}}$.

• Le discriminant de x^2-x-6 est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 25 > 0$ donc (E_5) possède deux solutions réelles : $\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2} = -2$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2} = 3$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \{-2\,;3\}}$.

• Le discriminant de $2x^2+x-3$ est $\Delta = 1^2 - 4\times 2\times(-3) = 25 > 0$ donc (E_6) possède deux solutions réelles : $\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 2} = 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{-\frac{3}{2}\,;1\}}$.

• Le discriminant de $2x^2+x+3$ est $\Delta = 1^2 - 4\times 2\times 3 = -23 < 0$ donc (E_7) n'a pas de solution réelle.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \varnothing}$.

• Le discriminant de $-x^2+2x+1$ est $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 1 = 8 > 0$ donc (E_8) possède deux solutions réelles : $\frac{-2-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$ et $\frac{-2+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\}}$.

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1)\ x^2+2\sqrt{2}x-3=0 \qquad (E_2) : -x^2+x+1=3x-7$$

$$(E_3) : (x-2)(-3x^2+19x-6)=0 \qquad (E_4) : x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0.$$

Solution.
• Le discriminant de $x^2+2\sqrt{2}x-3$ est $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4\times 1\times(-3) = 20 > 0$ donc (E_1) possède deux solutions réelles : $\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{20}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{2}-\sqrt{5}$ et $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_1) \text{ est } \{-\sqrt{2}-\sqrt{5}\,;-\sqrt{2}+\sqrt{5}\}}$.

• $(E_2) \iff -x^2+x+1-(3x-7)=0 \iff -x^2-2x+8=0$
Le discriminant de $-x^2-2x+8$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 8 = 36 > 0$ donc (E_2) possède deux solutions réelles : $\frac{2-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = 2$ et $\frac{2+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = -4$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_2) \text{ est } \{-4\,;2\}}$.

• $(E_3) \iff x-2=0 \text{ ou } -3x^2+19x-6=0$.
D'une part, l'unique solution de $x-2=0$ est $x=2$.
D'autre part, le discriminant de $-3x^2+19x-6$ est $\Delta = 19^2 - 4\times(-3)\times(-6) = 289 > 0$ donc l'équation $-3x^2+19x-6=0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-19-\sqrt{289}}{2\times(-3)} = 6$ et $\frac{-19+\sqrt{289}}{2\times(-3)} = \frac{1}{3}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \{2\,;6\,;\frac{1}{3}\}}$.

• Le discriminant de $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ est $\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4\times 1\times\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (1-\sqrt{2})^2 > 0$ donc (E_4) possède deux solutions réelles : $\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}-|1-\sqrt{2}|}{2} = \frac{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}{2} = 1$ et $\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+|1-\sqrt{2}|}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{1\,;\sqrt{2}\}}$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

$$(E_1) : \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \qquad (E_2) : \frac{3x^2-8x+16}{x-4} = 2x \qquad (E_3) : x+\frac{1}{x} = 3 \qquad (E_4) : 4x^4-13x^2+3 = 0$$

$$(E_5) : -2x+9\sqrt{x}-4 = 0 \qquad (E_6) : -\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}-1 = 0 \qquad (E_7) : \sqrt{x+4} = 7-2x$$

$$(E_8) : (x^2-5)^2+22(x^2-5)+121 = 0 \qquad (E_9) : x^3-3x^2 = x \qquad (E_{10}) : mx^2-\sqrt{m}x+1 = 0 \text{ où } m \in \mathbb{R}_+$$

Solution.

• Pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$ donc

$$(E_1) \iff 2x = x^2+1 \iff x^2-2x+1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \{1\}}$.

• Pour tout réel $x \neq 4$,

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff 3x^2-8x+16 = 2x(x-4) \iff 3x^2-8x+16-2x(x-4) = 0\\ &\iff 3x^2-8x+16-2x^2+8x = 0 \iff x^2+16 = 0\end{aligned}$$

Or, pour tout réel x, $x^2+16 > 0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \varnothing}$.

• Pour tout réel $x \neq 0$,

$$(E_3) \iff \frac{x^2+1}{x} = 3 \iff x^2+1 = 3x \iff x^2-3x+1 = 0$$

Le discriminant de x^2-3x+1 est $\Delta = (-3)^2-4\times1\times1 = 5 > 0$ donc l'équation (E_3) possède deux solutions réelles : $\frac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-(-3)+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (E_3) \text{ est } \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

• En posant $X = x^2$, l'équation devient $4X^2-13X+3 = 0$. Le discriminant de $4X^2-13X+3$ est $\Delta = (-13)^2-4\times4\times3 = 121 > 0$ donc l'équation $4X^2-13X+3 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-13)-\sqrt{121}}{2\times4} = \frac{1}{4}$ et $\frac{-(-13)+\sqrt{121}}{2\times4} = 3$. On en déduit que

$$(E_4) \iff x^2 = \frac{1}{4} \text{ ou } x^2 = 3 \iff x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_4) \text{ est } \{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}}$.

• Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \sqrt{x}$ de sorte que $X^2 = x$ et qu'ainsi l'équation s'écrit $-2X^2+9X-4 = 0$. Le discriminant du trinôme $-2X^2+9X-4$ est $\Delta = 9^2-4\times(-2)\times(-4) = 49 > 0$ donc l'équation $-2X^2+9X-4 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-9-\sqrt{49}}{2\times(-2)} = 4$ et $\frac{-9+\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$(E_5) \iff \sqrt{x} = 4 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = 16 \text{ ou } x = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_5) \text{ est } \{16\,;\frac{1}{4}\}.}$

• Pour tout $x \neq 0$,

$$(E_6) \iff \frac{-1+6x-x^2}{x^2} = 0 \iff -x^2+6x-1=0.$$

Le discriminant de $-x^2+6x-1$ est $\Delta = 6^2 - 4\times(-1)\times(-1) = 32 > 0$ donc l'équation $-x^2+6x-1=0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-6-\sqrt{32}}{2\times(-1)} = \frac{-6-4\sqrt{2}}{-2} = 3+2\sqrt{2}$ et $\frac{-6+\sqrt{32}}{2\times(-1)} = \frac{-6+4\sqrt{2}}{-2} = 3-2\sqrt{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_6) \text{ est } \{3+2\sqrt{2}\,;3-2\sqrt{2}\}}$.

• On commence par remarquer que $\sqrt{x+4}$ existe si et seulement si $x \geqslant -4$ et, pour tout $x \geqslant -4$,

$$x+4 = (7-2x)^2 \Longrightarrow x+4 = 49-28x+4x^2 \Longrightarrow 4x^2-29x+45=0$$

Le discriminant de $4x^2-27x+45$ est $\Delta = (-29)^2 - 4\times 4\times 45 = 121 > 0$ donc l'équation $4x^2-29x+45=0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-29)-\sqrt{121}}{2\times 4} = \frac{9}{4}$ et $\frac{-(-29)+\sqrt{121}}{2\times 4} = 5$.

Or, pour $x=5$, $7-2x=-3<0$ donc $7-2x \neq \sqrt{x+4}$. En revanche, pour $x=\frac{9}{4}$, $7-2x=\frac{5}{2}$ et $\sqrt{x+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ donc il y a bien égalité.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_7) \text{ est } \{\frac{5}{2}\}}$.

• On pose $X = x^2-5$ de sorte que l'équation se réécrit $X^2+22X+121=0$. Le discriminant de $X^2+22X+121$ est $22^2-4\times 1\times 121 = 0$ donc l'équation $X^2+22X+121$ possède une unique solutions réelle : $\frac{-22}{2} = -11$. On en déduit que

$$(E_8) \iff x^2-5=-11 \iff x^2=-6$$

Comme $-6<0$, on conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_8) \text{ est } \varnothing}$.

• Pour tout réel x,

$$(E_9) \iff x^3-3x^2-x=0 \iff x(x^2-3x-1)=0 \iff x=0 \text{ ou } x^2-3x-1=0.$$

Le discriminant de x^2-3x-1 est $\Delta = (-3)^2-4\times 1\times(-1) = 13 > 0$ donc l'équation $x^2-3x+1=0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-3)-\sqrt{13}}{2} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-(-3)+\sqrt{13}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_9) \text{ est } \{0\,;\frac{3-\sqrt{13}}{2}\,;\frac{3+\sqrt{13}}{2}\}}$.

• Le discriminant de $mx^2-\sqrt{m}x+1$ est $(-\sqrt{m})^2-4\times m\times 1 = m-4m = -3m < 0$ car $m>0$ donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_{10}) \text{ est } \varnothing}$.

Exercice 23. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$(I_1) : x^2-5x+6 \geqslant 0$ $\quad(I_2) : 3x^2-x+1<0$ $\quad(I_3) : 3x^2+x-2<0$ $\quad(I_4) : x^2+x+\frac{1}{4} \leqslant 0$

$(I_5) : x^3 \geqslant x^2+12x$ $\quad(I_6) : x \leqslant x^2-1$ $\quad(I_7) : x-\sqrt{x}-2 \leqslant 0$ $\quad(I_8) : x^4 > 3x^2+4$

Solution.

• Le discriminant de x^2-5x+6 est $\Delta = (-5)^2-4\times 1\times 6 = 1 > 0$ donc l'équation $x^2-5x+6=0$ possède deux solutions réelles : $\frac{5-\sqrt{1}}{2} = 4$ et $\frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$. Comme $a=1>0$, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_1) \text{ est }]-\infty\,;2] \cup [3\,;+\infty[}$.

• Le discriminant de $3x^2 - x + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0$ donc, comme $a = 3 > 0$, pour tout réel x, $3x^2 - x + 1 > 0$. Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_2) \text{ est } \varnothing}$.

• Le discriminant de $3x^2 + x - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$ donc l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 3} = -1$ et $\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 3} = \frac{2}{3}$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_3) \text{ est } \left]-1\,;\frac{2}{3}\right[}$.

• Le discriminant de $x^2 + x + \frac{1}{4}$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times \times \frac{1}{4} = 0$ donc l'équation $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ possède une unique solution réelle : $\frac{-1}{2}$. De plus, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$, $x^2 + x + \frac{1}{4} > 0$. On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_4) \text{ est } \{-\frac{1}{2}\}}$.

• Pour tout réel x,

$$(I_5) \iff x^3 - x^2 - 12x \geqslant 0 \iff x(x^2 - x - 12) \geqslant 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 12$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 > 0$ donc l'équation $x^2 - x - 12$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2} = -3$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x^2 - x - 12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x(x^2 - x - 12)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_5) \text{ est } [-3\,;0] \cup [4\,;+\infty[}$.

• Pour tout réel x,

$$(I_6) \iff 0 \leqslant x^2 - 1 - x \iff x^2 - x - 1 \geqslant 0$$

Le discriminant de $x^2 - x - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ donc l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_6) \text{ est } \left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[}$.

• Posons, pour tout réel $x > 0$, $X = \sqrt{x}$. Alors, l'inéquation (I_7) se réécrit $X^2 - X - 2 \leqslant 0$. Le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ possède deux racines réelles : $\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2} = 2$. Ainsi, $X^2 - X - 2 \leqslant 0$ si et seulement si $-1 \leqslant X \leqslant 2$. On en déduit que

$$(I_7) \iff -1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2 \iff 0 \leqslant x \leqslant 4$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_7) \text{ est } [0\,;4]}$.

• Pour tout réel x, (I_8) équivaut à $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$. On pose $X = x^2$ de sorte que cette inéquation se réécrit $X^2 - 3X - 4 > 0$. Le discriminant de $X^2 - 3X - 4$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$ donc l'équation $X^2 - 3X - 4 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2} = -1$ et $\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2} = 4$. Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $X^2 - 3X - 4 > 0$ si et seulement si $X \in]-\infty\,;-1[\cup]4\,;+\infty[$. On en déduit que

$$(I_8) \iff x^2 < -1 \text{ ou } x^2 > 4 \iff x^2 > 4 \iff x < -2 \text{ ou } x > 2.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I_8) \text{ est }]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[}$.