⧫ Corrigés des exercices du chapitre 21

Exercice 1. Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+2y-z \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$$

Solution.

• Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2)) &= f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)) \\ &= (\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2) \\ &= \lambda(x_1+2y_1-z_1)+(x_2+2y_2-z_2) \\ &= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• Soit $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} g(\lambda\,(x_1\,;y_1)+(x_2\,;y_2)) &= g((\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2)) \\ &= ((\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)\,;2(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)) \\ &= (\lambda(x_1+y_1)+(x_2+y_2)\,;\lambda(2x_1-y_1)+(2x_2-y_2)) \\ &= \lambda\,(x_1+y_1\,;2x_1-y_1)+(x_2+y_2\,;2x_2-y_2) \\ &= \lambda g((x_1\,;y_1))+g((x_2\,;y_2)) \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

Exercice 2. On considère l'application $f:(x,y)\longmapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer$f(1,1)$ et $f(2,2)$.
2. L'application f est-elle linéaire ?

Solution.

1. $f(1,1)=1\times 1=1$ et $f(2,2)=2\times 2=4$.
2. On remarque que $f(2,2)\neq 2f(1,1)$ c'est-à-dire $f(2(1,1))\neq 2f(1,1)$ donc f n'est pas linéaire.

Exercice 3. Montrer que l'application $f:(x,y,z)\longmapsto(x+2y,4x-y+z,2x+2y+3z)$ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

Solution. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned} &f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2)) \\ &\quad= f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)) \\ &\quad= (\lambda x_1+x_2+2(\lambda y_1+y_2)\,;4(\lambda x_1+x_2)-(\lambda y_1+y_2)+(\lambda z_1+z_2)\,; \\ &\qquad\qquad 2(\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2)) \\ &\quad= (\lambda(x_1+2y_1)+x_2+2y_2\,;\lambda(4x_1-y_1+z_1)+(4x_2-y_2+z_2)\,; \\ &\qquad\qquad \lambda(2x_1+2y_1+3z_1)+(2x_2+2y_2+3z_2)) \\ &\quad= \lambda\,(x_1+2y_1\,;4x_1-y_1+z_1\,;2x_1+2y_1+3z_1)+ \\ &\qquad\qquad (x_2+2y_2\,;4x_2-y_2+z_2\,;2x_2+2y_2+3z_2) \\ &\quad= \lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2)) \end{aligned}$$

donc f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que f est bijective. Soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$f((x\,;y\,;z)) = (a\,;b\,;c) \iff \begin{cases} x+2y=a \\ 4x-y+z=b \\ 2x+2y+3z=c \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=a \\ -9y+z=b-4a & L_2 \leftarrow L_2-4L_1 \\ -2y+3z=c-2a & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y=a \\ -9y+z=b-4a \\ 25z=-10a-2b+9c \quad L_3 \leftarrow 9L_3-2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y=a \\ -9y+(-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c)=b-4a \\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y=a \\ -9y=-\frac{18}{5}a+\frac{27}{25}-\frac{9}{25}c \\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2(\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c)=a \\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}c \\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{1}{5}a+\frac{6}{25}b-\frac{2}{25}c \\ y=\frac{2}{5}a-\frac{3}{25}b+\frac{1}{25}c \\ z=-\frac{2}{5}a-\frac{2}{25}b+\frac{9}{25}c \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f((x\,;y\,;z)) = (a\,;b\,;c)$ donc f est bijective et c'est donc un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$. De plus, le calcul précédent montre que

$$f^{-1} : (x\,;y\,;z) \longmapsto \left(\frac{1}{5}x+\frac{6}{25}y-\frac{2}{25}z\,;\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}y+\frac{1}{25}z\,;-\frac{2}{5}x-\frac{2}{25}y+\frac{9}{25}z\right).$$

Exercice 4. Déterminer une base du noyau de chacune des applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+2y-z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z, 2x+y) \end{array}$$

Solution.

• Détermination de $\ker(f)$:

$$(x\,;y\,;z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+(x+2y)=0 \\ z=x+2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+3y=0 \\ z=x+2y \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x \\ z=x+2(-\frac{2}{3}x) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x \\ z=-\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Ainsi, $\ker(f) = \left\{\left(x\,;-\frac{2}{3}x\,;-\frac{1}{3}x\right)\right\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ donc, comme $\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $(\left(1\,;-\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right))$ est une base de $\ker(f)$.

• Détermination de $\ker(g)$:

$$(x\,;y\,;z)\in\ker(g)\iff\begin{cases}x+y+z=0\\x-z=0\\2x+y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+x=0\\z=x\\2x+y=0\end{cases}\iff\begin{cases}z=x\\y=-2x\end{cases}$$

Ainsi, $\ker(g)=\{(x\,;-2x\,;x)\}\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1\,;-2\,;1))$ donc, comme $(1\,;-2\,;1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $((1\,;-2\,;1))$ est une base de $\ker(g)$

Exercice 5.

1. Montrer que $f:(x,y,z)\longmapsto x-2y+3z$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-2y+3z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de H.

Solution.

1. Soit $(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $(x_2\,;y_2\,;z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Alors,

$$\begin{aligned}f(\lambda\,(x_1\,;y_1\,;z_1)+(x_2\,;y_2\,;z_2))&=f((\lambda x_1+x-2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2))\\&=(\lambda x_1+x_2)-2(\lambda y_1+y_2)+3(\lambda z_1+z_2)\\&=\lambda(x_1-2y_1+3z_1)+(x_2-2y_2+3z_2)\\&=\lambda f((x_1\,;y_1\,;z_1))+f((x_2\,;y_2\,;z_2))\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

2. Par définition, $H=\ker(f)$ donc, par propriété, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Par définition,

$$\begin{aligned}H&=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\mid x=2y-3z\}\\&=\{(2y-3z\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\mid(y\,;z)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{y\,(2\,;1\,;0)+z\,(-3\,;0\,;1)\mid(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)\end{aligned}$$

en posant $v_1=(2\,;1\,;0)$ et $v_2=(-3\,;0\,;1)$. Soit a et b deux réels tels que $av_1+bv_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(2a-3b\,;a\,;b)=(0\,;0\,;0)$ donc $a=b=0$ et ainsi (v_1,v_2) est libre. On conclut que (v_1,v_2) est une base de H.

Exercice 6. Déterminer une base de l'espace image de chacune des applications linéaires suivantes, puis en déduire son rang.

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(x,y)&\longmapsto&(x+y,2x+2y)\end{array}\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y)&\longmapsto&(x+y,x+2y,y)\end{array}$$

Solution.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f((1\,;0)),f((0\,;1)))=\mathrm{Vect}((1\,;2)\,,(1\,;2))=\mathrm{Vect}((1\,;2))$ donc $((1\,;2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\mathrm{rg}(f)=1$.

• Par propriété, $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Vect}(g((1\,;0)),g((0\,;1)))=\mathrm{Vect}((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$. Soit a et b deux réels tels que $a\,(1\,;1\,;0)+b\,(1\,;2\,;1)=0_{\mathbb{R}_3}$. Alors, $(a+b\,;a+2b\,;b)=(0\,;0\,;0)$ donc $b=0$ puis $a=0$. Ainsi, la famille $((1\,;1\,;0)\,,(1\,;2\,;1))$ est libre et elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. Par suite, $\mathrm{rg}(f)=2$.

Exercice 7.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0)) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (1\,;0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$.
2. Déterminer explicitement f.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution.

1. Posons $e_1 = (1\,;0\,;0)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (1\,;1\,;1)$ et considérons trois réels a, b et c tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, $(a+b+c\,;b+c\,;c) = (0\,;0\,;0)$ donc $c = 0$ puis $b = 0$ et, enfin, $a = 0$. Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est libre et, comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 0$, on conclut que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Or, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base donc il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = (0\,;1)$, $f(e_2) = (1\,;0)$ et $f(e_3) = (1\,;1)$.
2. Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $v = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Déterminons les coordonnées $(a\,;b\,;c)$ de v dans la base (e_1, e_2, e_3). Pour cela, on remarque que $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = e_2 - e_1$ et $\varepsilon_3 = e_3 - e_1 - (e_2 - e_1) = e_3 - e_2$. Ainsi,
$$v = xe_1 + y(e_2 - e_1) + z(e_3 - e_2) = (x-y)e_1 + (y-z)e_2 + ze_3$$
donc, par linéarité de f,
$$f(u) = (x-y)f(e_1) + (y-z)f(e_2) + zf(e_3) = (0\,;x-y) + (y-z\,;0) + (z\,;z) = (y\,;x-y+z)$$
Ainsi, $f : (x\,;y\,;z) \longmapsto (y\,;x-y+z)$.
3. Par définition,
$$(x\,;y\,;z) \in \ker(f) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$
donc $\ker(f) = \{(x\,;0\,;x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1\,;0\,;1))$. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Or, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Déterminer les matrices des applications linéaires f et g dans les bases canoniques.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-2x+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, z+x, x+y) \end{array}$$

Solution.

- La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- La matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. On considère l'application linéaire $f : (x,y,z) \longmapsto (5x+5y-2z, x+7y-z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,0,2),,(0,1,1),(1,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = ((1,-1),(1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Solution.

1. Considérons trois réels a, b et c tels que $a\,(1\,;0\,;2)+b\,(0\,;1\,;1)+c\,(1\,;0\,;1)=(0\,;0\,;0)$. Alors, $(a+c\,;b\,;2a+b+c)=(0\,;0\,;0)$ donc $b=0$ puis $a+c=0$ et $2a+c=0$. On en déduit que $(2a+c)-(a+c)=0$ i.e. $a=0$ et enfin $c=0$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Les vecteurs $(1\,;-1)$ et $(1\,;2)$ ne sont pas colinéaires (car $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{2}$) donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$f(1,0,2)=(1\,;-1)$, $f(0,1,1)=(3\,;6)=3\,(1\,;2)$ et $f(1,0,1)=(3\,;0)=2\,(1\,;-1)+(1\,;2)$ donc
$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 10. On considère l'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x,y) & \longmapsto & (5x+2y,3x+y)\end{array}$$

1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. En utilisant A, démontrer que f est bijective et déterminer l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Solution.

1. La matrice A est $A=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$.

2. $\det A=5\times1-3\times2=-1\neq0$ donc A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&5\end{pmatrix}$ i.e. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-5\end{pmatrix}$. On en déduit que, pour tout $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y)=(-x+3y\,;2x-5y)$.

Exercice 11. On considère l'endomorphisme
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{x-2y+z}{2},y,\frac{x+2y+z}{2}\right).\end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. En déduire les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $g=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}-f$ et de $h=2f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Solution.

1. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}\frac12&-1&\frac12\\0&1&0\\\frac12&1&\frac12\end{pmatrix}$.

2. On en déduit que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $I_3-A=\begin{pmatrix}\frac12&1&-\frac12\\0&0&0\\-\frac12&-1&\frac12\end{pmatrix}$

et celle de h est $2A-I_3=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$.

Exercice 12. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice de $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. dans la base $\mathcal{B}'$.

Solution.

1. Considérons des réels a, b et c tels que $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = (0\,;0\,;0)$. Alors, $(a - b + c\,; b + c\,; a + c) = 0$. Ainsi, $a - b + c = 0$ et $a + c = 0$ donc $b = 0$. De plus, $b + c = 0$ donc, comme $b = 0$, $c = 0$ et, comme $a + c = 0$, $a = 0$. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est libre. Or, il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $f(\varepsilon_1) = (1\,;0\,;1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = (-1\,;1\,;0) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = (2\,;1\,;2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans $\mathcal{B}'$ est T^n.

On observe que $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons-le par récurrence.

Comme $T^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'égalité est vraie au rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.