⧫ Corrigés des exercices du chapitre 20

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_1^2 x^3 \,\mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \int_1^0 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \int_0^{e-1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u}$

4. $I_4 = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{-3x} \,\mathrm{d}x$ **5.** $I_5 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$ **6.** $I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

7. $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin^2(\theta) \,\mathrm{d}\theta$ **8.** $I_8 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$ **9.** $I_9 = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} \,\mathrm{d}t$

Solution.

1. $I_1 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}$ soit $\boxed{I_1 = \frac{15}{4}}$.

2. $I_2 = [\mathrm{e}^t]_1^0 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^1$ soit $\boxed{I_2 = 1 - e}$.

3. $I_3 = [\ln(1+u)]_0^{e-1} = \ln(1+e-1) - \ln(1) = \ln(e)$ soit $\boxed{I_3 = 1}$.

4. $I_4 = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^{\ln(2)} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\ln(2)} - \left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^0\right) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\ln(8)} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{8})} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{8} + \frac{1}{3}$ soit $\boxed{I_4 = \frac{7}{24}}$.

5. $I_5 = \left[-\frac{1}{4x^4}\right]_1^2 = -\frac{1}{4\times 2^4} - \left(-\frac{1}{4\times 1^4}\right) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{4}$ soit $\boxed{I_5 = \frac{15}{64}}$.

6. $I_6 = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(1+1^2) - \frac{1}{2}\ln(1)$ soit $\boxed{I_6 = \frac{1}{2}\ln(2)}$.

7. $I_7 = \left[\frac{1}{3}\sin^3(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin^3(0)$ soit $\boxed{I_7 = \frac{1}{3}}$.

8. $I_8 = [\ln(\ln(x))]_{\sqrt{e}}^{e} = \ln(\ln(e)) - \ln(\ln(\sqrt{e})) = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $\boxed{I_8 = \ln(2)}$.

9. $I_9 = [\ln(1+\mathrm{e}^t)]_0^{\ln(2)} = \ln(1+\mathrm{e}^{\ln(2)}) - \ln(1+\mathrm{e}^0) = \ln(1+2) - \ln(2)$ soit $\boxed{I_9 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^2 4x^4 \,\mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \int_0^1 (\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}) \,\mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \int_1^2 (5 + 3\sqrt{t}) \,\mathrm{d}t$ **4.** $I_4 = \int_1^3 \frac{x+1}{x} \,\mathrm{d}x$

Solution.

1. $I_1 = 4\int_0^2 x^4 \,\mathrm{d}x = 4\left[\frac{x^5}{5}\right)_0^2 = 4\left(\frac{2^5}{5} - 0\right)$ soit $\boxed{I_1 = \frac{128}{5}}$.

2. $I_2 = \left[-\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \left(-\mathrm{e}^0 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^0\right) = -\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \left(-1 - \frac{1}{2}\right)$ soit $\boxed{I_2 = \frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}}$.

3. $I_3 = \int_1^2 \left(5 + 3t^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}t = \left[5t + 2t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 5\times 2 + 2\times 2^{\frac{3}{2}} - (5\times 1 + 2\times 1^{\frac{3}{2}}) = 10 + 2^{\frac{5}{2}} - 7 = 3 + \sqrt{2^5}$ soit $\boxed{I_3 = 3 + 4\sqrt{2}}$.

4. $I_4 = \int_1^3 1 + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x + \ln(x)]_1^3 = 3 + \ln(3) - (1 + \ln(1))$ soit $\boxed{I_4 = 2 + \ln(3)}$.

Exercice 3. On considère les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{2x - 1}{\mathrm{e}^{2x} + x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I.

2. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de J.

Solution.

1. On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ avec u strictement positive sur $[0\,;1]$ donc

$$I = \left[\ln(\mathrm{e}^{2x} + x)\right]_0^1 = \ln(e^2 + 1) - \ln(1)$$

i.e. $I = \ln(e^2 + 1)$.

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + x} + \frac{2x - 1}{\mathrm{e}^{2x} + x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 1 + 2x - 1}{\mathrm{e}^{2x} + x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{2(\mathrm{e}^{2x} + x)}{\mathrm{e}^{2x} + x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\,\mathrm{d}x = 2 \times (1 - 0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I + J = 2}$.

Comme $J = (I + J) - I$, on conclut que $\boxed{J = 2 - \ln(e^2 + 1)}$.

Exercice 4. On considère la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour tout réel x, $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $F(x)$ en fonction de x.

3. On considère la fonction $G : x \longmapsto \int_x^{3x} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$. Calculer, pour tout réel x, $G'(x)$.

Solution.

1. Comme la fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamentale de l'analyse, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}}$.

Or, pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $F'(x) > 0$. On en déduit que $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

2. Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $F(0) = 0$, $\underline{F(x) < 0 \text{ si } x < 0,\ F(0) = 0 \text{ et } F(x) > 0 \text{ si } x > 0}$.

3. D'après la relation de Chasles, pour tout réel x,

$$G(x) = \int_0^{3x} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t + \int_x^0 \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{3x} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = F(3x) - F(x).$$

Par composition et somme, on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$G'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(3x)^2 + 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$$

i.e. $\boxed{G'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{9x^2 + 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}}$.

Exercice 5. On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$			0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a. Interpréter graphiquement $g(2)$.

b. Montrer que $0 \leqslant g\,(2) \leqslant 2{,}5$.

3. a. Soit x un réel supérieur à 2.

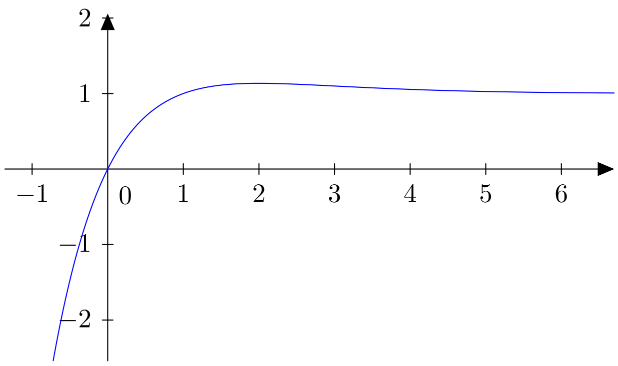
Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Voici une courbe susceptible de représenter f :



2. a. Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0\,;2]$, on peut interpréter $g(2)$ comme l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

b. D'après le tableau de variation, pour tout $t \in [0\,;2]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1+\mathrm{e}^{-2}$ donc, d'après les inégalités de la moyenne, $0\times(2-0) \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)\times(2-0)$ i.e. $0 \leqslant g(2) \leqslant 2+2\mathrm{e}^{-2}$. Or, $\mathrm{e} \geqslant 2$ donc $\mathrm{e}^2 \geqslant 4$ et, ainsi, $2+2\mathrm{e}^{-2} \leqslant 2+\frac{2}{4} = 2{,}5$. On conclut que $\boxed{0 \leqslant g\,(2) \leqslant 2{,}5}$.

3. a. D'après le tableau de variation, pour tout $t \in [2\,;+\infty[$, $f(t) \geqslant 1$ donc, par les inégalités de la moyenne, $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1\times(x-2)$ soit $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$ (car $x>2$.)

D'après la relation de Chasles, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = g(2) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$ donc $\boxed{g(x) \geqslant x-2}$.

b. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

4. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 donc, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)$. Or, d'après le tableau de variation de f, $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ donc $\underline{g \text{ est croissante sur }]-\infty\,;0] \text{ et } g \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty[}$.$(\mathcal{C})$

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

On définit ainsi une suite de réels (I_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $I_n \geqslant 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que $x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

b. En déduire que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (I_n).

Solution.

1. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ donc, par produit, $x^n\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ i.e. $\boxed{I_n \geqslant 0}$.

2. a. Soit $x \in [0\,;1]$. Alors, $x \geqslant 0$ donc $-x \leqslant 0$ et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0$ i.e. $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$. En multipliant par $x^n \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n}$.

b. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

i.e. $\boxed{I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $I_3 = \displaystyle\int_1^2 x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$ **4.** $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution.

1. On pose $u : \theta \longmapsto \theta$ et $v : \theta \longmapsto -\cos(\theta)$ de telle sorte que $u' : \theta \longmapsto 1$ et $v' : \theta \longmapsto \sin(\theta)$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_1 = [\theta \times (-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\times(-\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = [\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)$$

donc $\boxed{I_1 = 1}$.

2. On pose $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto 1$ et $v' : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_2 = \left[x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$$
$$= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^0)$$

donc $\boxed{I_2 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}}$.

3. On pose $u : x \longmapsto \dfrac{x^4}{4}$ et $v : x \longmapsto \ln(x)$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto x^3$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;2]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_3 = \left[\frac{x^4}{4} \times \ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2^4}{4}\ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = 4\ln(2) - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2$$
$$= 4\ln(2) - \frac{2^4}{16} - \left(-\frac{1^4}{16}\right)$$

donc $\boxed{I_3 = 4\ln(2) - \dfrac{15}{16}}$.

4. On pose $u : x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ et $v : x \longmapsto \ln(x)$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;2]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_4 = \left[-\frac{1}{x} \times \ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(2) - 0 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(2) + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2} - (-1)$$

donc $\boxed{I_4 = \dfrac{1 - \ln(2)}{2}}$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ **4.** $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} (t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ **6.** $\displaystyle\int_1^e t^{2020}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ **7.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ **8.** $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Solution.

1. On pose $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto \frac{t^2}{2}$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;e]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_1 = \left[\ln(t) \times \frac{t^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1}{2}\ln(1) - \int_1^e \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

donc $\boxed{I_1 = \dfrac{e^2 + 1}{4}}$.

2. On pose $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\cos(t)$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \sin(t)$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= [t \times (-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0(-\cos(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_2 = 1}$.

3. On pose $u : t \longmapsto t^2$ et $v : t \longmapsto \mathrm{e}^t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto 2t$ et $v' : t \longmapsto \mathrm{e}^t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_3 = \left[t^2 \times \mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 2t \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = e - 2\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

On calcule cette dernière intégrale par une nouvelle intégration par parties. On pose $u_1 : t \longmapsto t$ et $v_1 : t \longmapsto \mathrm{e}^t$ de telle sorte que $u_1' : t \longmapsto 1$ et $v_1' : t \longmapsto \mathrm{e}^t$. Ainsi, u_1 et v_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = e - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = e - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

donc $\boxed{I_3 = e - 2}$.

4. On écrit $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \ln(t) \times 1\,\mathrm{d}t$ et on pose $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;2]$ donc, en intégrant par parties,

$$I_4 = [\ln(t) \times t]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times t\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1 \times (2-1)$$

donc $\boxed{I_4 = 2\ln(2) - 1}$.

5. On pose $u : t \longmapsto -\cos(t)$ et $v : t \longmapsto t-1$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \sin(t)$ et $v : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_5 &= [-\cos(t) \times (t-1)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t) \times 1\,\mathrm{d}t \\ &= -\cos(\pi) \times (\pi - 1) - (-\cos(0) \times (0-1)) + \int_0^{\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi - 1 - 1 + [\sin(t)]_0^{\pi} \\ &= \pi - 2 + \sin(\pi) - \sin(0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_5 = \pi - 2}$.

6. On pose $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto \frac{t^{2021}}{2021}$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto t^{2020}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;e]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_6 &= \left[\ln(t) \times \frac{t^{2021}}{2021}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^{2021}}{2021}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{2021}}{2021} - \frac{1}{2021}\int_1^e t^{2020}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{2021}}{2021} - \frac{1}{2021}\left[\frac{t^{2021}}{2021}\right]_1^e = \frac{e^{2021}}{2021} - \left(\frac{e^{2021}}{2021^2} - \frac{1}{2021^2}\right) \\ &= \frac{2021e^{2021}}{2021^2} - \frac{e^{2021}}{2021^2} + \frac{1}{2021^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_6 = \dfrac{2020\mathrm{e}^{2021}+1}{2021^2}}$.

7. Écrivons I_7 sous la forme $I_7 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t)) \times 1 \,\mathrm{d}t$ et posons $u : t \longmapsto \sin(\ln(t))$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}\cos(\ln(t))$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\mathrm{e}^\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
I_7 &= [\sin(\ln(t)) \times t]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \frac{1}{t}\cos(\ln(t)) \times t \,\mathrm{d}t \\
&= \sin(\ln(\mathrm{e}^\pi)) \times \mathrm{e}^\pi - \sin(\ln(1)) \times 1 - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \sin(\pi) \times \mathrm{e}^\pi - \sin(0) \times 1 - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour calculer cette nouvelle intégrale. Posons $u_1 : t \longmapsto \cos(\ln(t))$ et $v_1 : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u_1' : t \longmapsto -\frac{1}{t}\sin(\ln(t))$ et $v_1' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u_1 et v_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;\mathrm{e}^\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= [\cos(\ln(t)) \times t]_1^{\mathrm{e}^\pi} - \int_1^{\mathrm{e}^\pi} -\frac{1}{t}\sin(\ln(t)) \times t\,\mathrm{d}t \\
&= \cos(\ln(\mathrm{e}^\pi)) \times \mathrm{e}^\pi - \cos(\ln(1)) \times 1 + \int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d} \\
&= \cos(\pi)\mathrm{e}^\pi - \cos(0) + I_7 \\
&= -\mathrm{e}^\pi - 1 + I_7
\end{aligned}$$

Ainsi, $I_7 = -(-\mathrm{e}^\pi - 1 + I_7)$ donc $2I_7 = \mathrm{e}^\pi + 1$ et on conclut que $\boxed{I_7 = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}}$.

8. Écrivons I_8 sous la forme $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}t^2 \times 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et posons $u : t \longmapsto \frac{1}{2}t^2$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t^2}$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto t$ et $v' : t \longmapsto 2t\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
I_8 &= \left[-\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 t\left(-\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - 0 + \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} + \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} + \frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-1} - (-1))
\end{aligned}$$

et ainsi $\boxed{I_8 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-1}}$.

Exercice 9. Utiliser une ou plusieurs intégration(s) par parties pour répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une primitive de $f : x \longmapsto \ln^2(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto (x^3 - x)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Comme arctan est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, la primitive de arctan qui s'annule en 0 est la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. Écrivons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t) \times 1\,\mathrm{d}t$ et intégrons par parties en posant $u : t \longmapsto \arctan(t)$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux bien fonctions de classe $\mathscr{C}_1$ sur $\mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned} F(x) &= [\arctan(t) \times t]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \times t\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - 0 - \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, la primitive de arctan sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0 est la fonction

$$\boxed{F : x \longmapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}.$$

2. Comme f est continue sur $]0\,;+\infty[$, par le théorème fondamental de l'analyse, la primitive de f qui s'annule en 1 est la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$. Écrivons $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^2(t) \times 1\,\mathrm{d}t$ et intégrons par parties en posant $u : t \longmapsto \ln^2(t)$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t)$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux bien fonctions de classe $\mathscr{C}_1$ sur $[1\,;x]$ donc

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\ln^2(t) \times t\right]_1^x - \int_1^x 2\frac{\ln(t)}{t} \times t\,\mathrm{d}t = \ln^2(x) \times x - \ln^2(1) \times 1 - 2\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln^2(x) - 2\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On calcule cette dernière intégrale en intégrant à nouveau par parties. On pose $u_1 : t \longmapsto \ln(t)$ et $v_1 : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u_1' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v_1' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u_1 et v_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;x]$ donc

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t\,\mathrm{d}t = \ln(x) - \ln(1) - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = \ln(x) - 1(x-1)$$

donc $F(x) = x\ln^2(x) - 2(\ln(x) - x + 1)$.
Ainsi, la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est la fonction

$$\boxed{F : x \longmapsto x\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2x - 2}.$$

3. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, la primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (t^3 - t)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour calculer $F(x)$, on va procéder à trois intégration par parties successives.

Pour la première, on pose $u_1 : t \longmapsto t^3 - t$ et $v_1 : t \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$ de telle sorte que $u_1' : t \longmapsto 3t^2 - 1$ et $v_1' : t \longmapsto \mathrm{e}^{2t}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;x]$ donc

$$F(x) = \left[(t^3 - t)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x (3t^2 - 1) \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = (x^3 - x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x (3t^2 - 1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cette seconde intégrale, on pose $u_2 : t \longmapsto 3t^2 - 1$ et $v_2 : t \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$ de telle sorte que $u_2' : t \longmapsto 6t$ et $v_2' : t \longmapsto \mathrm{e}^{2t}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;x]$ donc

$$\int_0^x (3t^2 - 1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(3t^2 - 1)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x 6t \times \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = (3x^2 - 1)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - 3\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cette troisième intégrale, on pose $u_3 : t \longmapsto t$ et $v_3 : t \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$ de telle sorte que $u_3' : t \longmapsto 1$ et $v_3' : t \longmapsto \mathrm{e}^{2t}$. Ainsi, u_3 et v_3 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;x]$ donc

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{x\mathrm{e}^x}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x = \frac{x\mathrm{e}^x}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^x}{4} - \frac{1}{4}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^3 - x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left[(3x^2 - 1)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{1}{2} - 3\left(\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \left[(x^3 - x) - \frac{3x^2 - 1}{2} + \frac{3x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{3}{4}\right]\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1}{8} \end{aligned}$$

Ainsi, la primitive de $f : x \longmapsto (x^3 - x)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction

$$\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{8}\left[(4x^3 - 6x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^{2x} + 1\right].}$$

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + x} \quad (x = t^2)$

2. $I_2 = \displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 - 12x + 9} \quad \left(x = \frac{t+3}{2}\right)$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad (x = t^2)$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t + t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (u = \ln(t))$

Solution.

1. La fonction $\varphi : t \longmapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1\,;\sqrt{3}\right]$. De plus, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\sqrt{3}) = 3$ donc, en effectuant le changement de variable $x = t^2$, on a $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{t^2} + t^2} \times 2t\,\mathrm{d}t \underset{t \geqslant 0}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t + t^2} \times 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\ln(1+t)\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\ln(1+\sqrt{3}) - \ln(1+1)\right) \end{aligned}$$

soit $\boxed{I_1 = 2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

2. La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{t+3}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;5]$. De plus, $\varphi(1) = 2$ et $\varphi(5) = 4$ donc, en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{t+3}{2}$, on a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^5 \frac{1}{4(\frac{t+3}{2})^2 - 12 \times \frac{t+3}{2} + 9} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \int_1^5 \frac{1}{t^2+6t+9-6t-18+9} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^5 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5} - (-1)\right) \end{aligned}$$

soit $\boxed{I_2 = \dfrac{2}{5}}$.

3. La fonction $\varphi : t \longmapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;2]$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 4$ donc, en effectuant le changement de variable $x = t^2$, on a $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ et

$$I_3 = \int_0^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{t^2}} \times 2t\,\mathrm{d}t \underset{t \geqslant 0}{=} \int_0^2 2t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2J$$

en posant $J = \displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour calculer cette intégrale, on va procéder à une intégration par parties. Pour cela, on pose $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} J &= \left[t \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 1 \times (-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-2} + \int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-2} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^2 \\ &= -2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-2} - (-\mathrm{e}^0) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $I_3 = 2I = 2(1 - 3\mathrm{e}^{-2})$ soit $\boxed{I_3 = 2 - 6\mathrm{e}^{-2}}$.

4. Poser $u = \ln(t)$ revient à poser $t = \mathrm{e}^u$. La fonction $\varphi : u \longmapsto \mathrm{e}^u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = e$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et

$$I_4 = \int_1^e \frac{1}{1+\ln^2(t)} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$

soit $\boxed{I_4 = \dfrac{\pi}{4}}$.

Exercice 11.

1. Rappeler les formules d'Euler.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^3(\theta)$ comme une combinaison linéaire de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Solution.

1. Les formules d'Euler assurent que

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}.$$

2. On en déduit que, grâce à la formule du binôme de Newton (pour tout complexes a et b, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$),

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^3}{2^3} = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3 + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^2 + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^3}{8} \\ &= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3\theta)}\right) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3\theta)} + 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta)\right)\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)}$.

3. On en déduit, par linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin(3\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\left[\sin(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 0\right] + \frac{3}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right] \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{3}{4} \times 1\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}}$.

Exercice 12. On pose

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que

$$I = J \qquad \text{et} \qquad J = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - I.$$

2. En déduire les valeurs de I et J.

Solution.

1. On pose $u : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et $v : x \longmapsto \sin(x)$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $v' : x \longmapsto \cos(x)$. Ainsi, u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$I = \left[-\mathrm{e}^{-x} \times \sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^{-x} \times \cos(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

donc $\boxed{I = J}$.

Procédons à une seconde intégration par parties pour J en posant $u_1 : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et $v_1 : x \longmapsto \cos(x)$ de telle sorte que $u_1' : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $v_1' : x \longmapsto -\sin(x)$. Ainsi, u_1 et v_1 sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$J = \left[-\mathrm{e}^{-x} \times \cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^{-x} \times (-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\pi} \times (-1) - (-\mathrm{e}^{0} \times 1) - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

donc $\boxed{J = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - I}$.

2. On en déduit que $I = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - I$ donc $2I = \mathrm{e}^{-\pi} + 1$ et finalement

$$\boxed{I = J = \frac{\mathrm{e}^{-\pi} + 1}{2}}.$$

Exercice 13 (Intégrales de Wallis)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Démontrer que $I_{n+1} \sim I_n$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$ et $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$.

Solution.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$.

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))$ donc $\boxed{I_2 = 1}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{I_3 = \frac{\pi}{4}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,[\sin(t) - 1]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \leqslant 1$ donc $\sin(t) - 1 \leqslant 0$ et $\sin(t) \geqslant 0$ donc $\sin^n(t) \geqslant 0$ donc $\sin^n(t)\,[\sin(t) - 1] \leqslant 0$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,[\sin(t) - 1]\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ et donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. On conclut dès lors que la suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

Comme $\sin^n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n(t)\,\mathrm{d} \geqslant 0$. Dès lors, grâce à la relation de Chasles,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\sin^n(t) \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Les inégalités de la moyenne assure alors que

$$I_n \geqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

Ainsi, $\boxed{I_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

On utilise la formule d'intégration par parties en considérant $u : t \longmapsto -\cos(t)$ et $v : t \longmapsto \sin^{n+1}(t)$ qui sont dérivables et telles que leurs dérivées $u' : t \longmapsto \sin(t)$ et $v' : t \longmapsto (n+1)\cos(t)\sin^n(t)$ sont continues sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On obtient

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \Big[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)(n+1)\cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2})
\end{aligned}$$

Dès lors, $I_{n+2} + (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Il s'ensuit que $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n}$.

4. Comme (I_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ donc, en divisant par $I_n > 0$, il vient $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ i.e. d'après la question précédente, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Or, $\dfrac{n+2}{n+1} \sim \dfrac{n}{n} \sim 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. Ainsi, $\boxed{I_{n+1} \sim I_n}$.

5. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ « $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$ et $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ ».

Initialisation. $I_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^1 0!^2}\pi$ et $I_1 = 1 = \dfrac{2^0 0!^2}{1!}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi \\
&= \frac{(2n+1)\times(2n)!}{2(n+1)\times 2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)(2n+1)\times(2n)!}{2^2(n+1)^2\times 2^{2n+1}(n!)^2}\pi \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2(n+1)+1}((n+1)!)^2}\pi
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2) \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3) \times (2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+2) \times (2n+1)!} \\
&= \frac{2^2(n+1)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi \text{ et } I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

6. a. On déduit de la question précédente que

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!\pi} \text{ i.e. } \boxed{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2\pi}}.$$

b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$. Alors,

$$u_n = \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2\pi} \times \frac{(2n+1)\pi}{2n} = \frac{(2n+1)}{2n} \times \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \times \pi$$

donc, grâce à la question **4.**,

$$u_n \sim \frac{2n}{2n} \times \frac{I_{2n}}{I_{2n}} \times \pi \sim \pi$$

et donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \pi}$.

Exercice 14. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \ln(2)$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

c. Conclure que la suite (I_n) est convergente.

2. Le but de cette question est de déterminer la limite de (I_n).
On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, le signe de $g(t)$.

c. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel positif, on a $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

d. En déduire la limite de la suite (I_n).

Solution.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0\,;1]$. Alors, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;1]$ donc, en multipliant par $x \geqslant 0$, $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \leqslant x$. Or, $x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \leqslant 1$. En ajoutant 1 à tous les membres de l'inégalité, il vient $1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$ et ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(1) \leqslant \ln\left(1 + x^{n+1}\right) \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln(2)$ i.e. $\boxed{0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \ln(2)}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par positivité et croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que $0 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right) \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln\left(1 + x^{n+1}\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(2)\, \mathrm{d}x$ i.e. $\boxed{0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \ln(2)}$.

c. On déduit de la question précédente que la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge}}$.

2. a. La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}.$$

Or, pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$ donc $g'(t) \leqslant 0$. On en déduit que la fonction $\boxed{g \text{ est décroissante sur } [0\,;+\infty]}$

b. Comme g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tout $t \geqslant 0$, $g(x) \leqslant g(0)$. Comme $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$, il s'ensuit que $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;+\infty],\ g(x) \leqslant 0}$.

c. On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\ln(1 + t) \leqslant t$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$. Alors, le réel x^n est positif donc, d'après ce qui précède, $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \geqslant 0,\ \ln\left(1 + x^n\right) \leqslant x^n}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit, en utilisant également **1.b.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}.$$

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que $I_0 + I_2 = 1$ et en déduire la valeur de I_2.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $x^{n+1} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

5. Démontrer que la suite (I_n) converge.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

   b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

   c. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+3}.$$

   d. En déduire que

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

   e. Démontrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

   f. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Solution.

1. Par définition, $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$ soit $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{4}}$.

   De même, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln(2) - \ln(1)\right]$ donc $\boxed{I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}}$.

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_0 + I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1(1-0) \end{aligned}$$

   donc $\boxed{I_0 + I_2 = 1}$.

   On en déduit que $I_2 = 1 - I_0$ donc $\boxed{I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $1 + x^2 > 0$ donc, par quotient, $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$.

   Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0}$.

4. **a.** Soit $x \in [0\,;1]$. Alors, $x \leqslant 1$ donc, en multipliant par x^n, $x^{n+1} \leqslant x^n$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in [0\,;1],\ x^{n+1} \leqslant x^n}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ donc, en multipliant par $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$, on en déduit que $\dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, i.e. $I_{n+1} \leqslant I_n$.

   On conclut donc que $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

5. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$.

6. **a.** La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ (car, pour tout réel x, $1+x^2 \neq 0$) donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}$.

b. Écrivons $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \times \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Posons $u : x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto x^n$ et $v' : x \longmapsto -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2} - 0 + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1} \times x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x}$.

c. Soit $x \in [0\,;1]$. Alors, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ et ainsi $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc, en multipliant par $x^{n+2} \geqslant 0$, $\dfrac{x^{n+2}}{2} \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$. À plus forte raison, comme $x^{n+2} \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$. Dès lors, comme $0 < 1$, par positivité et croissante de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+2}\,\mathrm{d}x.$$

Or,

$$\int_0^1 x^{n+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{1^{n+3}}{n+3} - 0 = \frac{1}{n+3}$$

donc, on conclut que $\boxed{0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+3}}$.

d. En multipliant les inégalité précédentes par $\dfrac{2}{n+1}$, il vient

$$0 \leqslant \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

et, en ajoutant $\dfrac{1}{2(n+1)}$ on déduit de la question **b.** que

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)}}.$$

e. En multipliant ces inégalités par $2n \geqslant 0$, il vient

$$\frac{n}{n+1} \leqslant 2nI_n \leqslant \frac{n}{n+1} + \frac{4n}{(n+1)(n+3)}.$$

Or, $\dfrac{n}{n+1} \sim \dfrac{n}{n} \sim 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\dfrac{4n}{(n+1)(n+3)} \sim \dfrac{4n}{n^2} \sim \dfrac{4}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{(n+1)(n+3)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$. Dès lors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} + \frac{4n}{(n+1)(n+3)} = 1$$

donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$ donc, par définition, $\boxed{I_n \sim \dfrac{1}{2n}}$.

f. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = 1 - x + x^2$, $f_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, etc.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = u_n$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(2) - (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}$.
6. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une primitive de f_n sur $[0\,;1]$ est

$$F_n : x \longmapsto x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

On remarque que

$$F_n(0) = 0 - \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 0^3 - \frac{1}{4} \times 0^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} \times 0^{n+1} = 0$$

et

$$F_n(1) = 1 - \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{4} \times 1^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} \times 1^{n+1} = u_n$$

donc

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = F_n(1) - F_n(0) = u_n - 0 \text{ i.e. } \boxed{\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = u_n}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1]$. Alors, $f_n(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$. Comme $-x \neq 1$ (puisque $x > 0$), on en déduit que $f_n(x) = 1 \times \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ i.e. $\boxed{f_n(x) = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}}$.

3. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est $x \longmapsto \ln(1+x)$ donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1)$$

i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2)}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait d'après les questions **1.** et **2.** que

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

donc, par linéarité de l'intégrale,

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \ = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or, d'après la question **3.**, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$ et, toujours par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

donc finalement,

$$\boxed{u_n = \ln(2) - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $1+x \geqslant 1$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ et, en multipliant par $x^{n+1} \geqslant 0$, on conclut que $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

i.e.

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1^{n+2}}{n+2} - \frac{0^{n+2}}{n+2}.$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|(-1)^{n+1}\right| \times \left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

car $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Ainsi, on déduit de la question précédente que

$$0 \leqslant \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+2}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = 0$$

donc, par propriété,

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Ainsi, par somme, on déduit de la question **4.** que (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}.$$

Exercice 17. On cherche à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}$.

1. À l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$, démontrer que $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

2. En remarquant que, pour tout réel u, $1 = 1+u-u$, déduire de la question précédente la valeur de I.

Solution.

1. La fonction $\varphi : u \longmapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;2]$. De plus, $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(2) = \ln(2)$ donc, en effectuant le changement de variable $t = \ln(u)$, on a $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ et

$$I = \int_1^2 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\ln(u)}} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^2 \frac{1}{1+u} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

soit $\boxed{I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u}$.

2. On en déduit que

$$I = \int_1^2 \frac{1+u-u}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1+u}{u(1+u)} - \frac{u}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$
$$= [\ln(u) - \ln(1+u)]_1^2 = \ln(2) - \ln(3) - (\ln(1) - \ln(2)) = 2\ln(2) - \ln(3) = \ln(2^2) - \ln(3)$$

soit finalement $\boxed{I = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}$.

Exercice 18. Soit f une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

En considérant la fonction $g : t \longmapsto \left(\sqrt{f(t)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.

Solution. La fonction $g : t \longmapsto \left(\sqrt{f(t)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2$ est définie et continue sur $[0\,;1]$ car f est continue et strictement positive sur $[0\,;1]$. De plus, g est positive sur $[0\,;1]$ donc, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Or, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t) - 2\times\sqrt{f(t)}\times\frac{1}{\sqrt{f(t)}} + \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 1\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= 1 - 2 + \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t - 1.\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t - 1 \geqslant 0$ i.e.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 1}.$$

Exercice 19. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Solution. Soit $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) > 0$. Considérons une primitive F de f sur $[a\,;b]$. Comme f est continue, il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [c-r\,;c+r]$. Alors, F est strictement croissante sur $[c-r\,;c+r]$ donc $F(c-r) < F(c+r)$. De plus, comme f est positive, F est croissante sur $[a\,;b]$ donc

$$F(a) \leqslant F(c-r) < F(c+r) \leqslant F(b).$$

Or, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ donc $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0}$.

Exercice 20. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et que m et M sont deux réels tels que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$.

En considérant $\displaystyle\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,\mathrm{d}t$, démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$.

Solution. Pour tout $t \in [0\,;1]$, $f(t) - m \geqslant 0$ et $M - f(t) \geqslant 0$ donc $(f(t)-m)(M-f(t)) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, il s'ensuit que

$$\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Or, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(t)-m)(M-f(t))\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 Mf(t) - f(t)^2 - mM + mf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= M\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 mM\,\mathrm{d}t + m\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - mM\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 mM\,\mathrm{d}t = mM(1-0) = mM$.

Ainsi, $-\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - mM \geqslant 0$ donc

$$\boxed{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant -mM}.$$

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Solution. Comme f est continue sur $[a\,;b]$, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[a\,;b]$. Ainsi, il existe deux réels m et M tels que, pour tout $t\in[a\,;b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$. Dès lors, d'après les inégalités de la moyenne, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$m\left(\frac{1}{n}-0\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\left(\frac{1}{n}-0\right)$$

car $\dfrac{1}{n} > 0$ et ainsi

$$\frac{m}{n} \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

Exercice 22 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b]$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Solution. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons les fonctions $u : t \longmapsto f(t)$ et $v : t \longmapsto -\dfrac{1}{n}\cos(nt)$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto f'(t)$ et $v' : t \longmapsto \sin(nt)$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[f(t)\times\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\times\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{f(b)\cos(nb)}{n} + \frac{f(a)\cos(na)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or,

$$0 \leqslant \left|-\frac{f(b)\cos(nb)}{n}\right| = \frac{|f(b)|\times|\cos(nb)|}{n} \leqslant \frac{|f(b)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, par le théorème d'encadrement, $\left|-\dfrac{f(b)\cos(nb)}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi $-\dfrac{f(b)\cos(nb)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On montre de même que $\dfrac{f(a)\cos(na)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Enfin, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in [a\,;b]$, $|f'(t)\cos(nt)| = |f'(t)| \times |\cos(nt)| \leqslant |f'(t)|$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\dfrac{1}{n} > 0$, on en déduit que

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et ainsi, comme précédemment, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par somme de limites, on conclut que

$$\boxed{\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$