♦ Corrigés des exercices du chapitre 1

Exercice 1. Calculer :

1. $A = -10 - (-4) - 1 + 30 + (-15) - (-20)$
2. $B = -15 + (-14) + 30 - 15 + (-9)$
3. $C = (-3 - 6) \times (6 - 8)$
4. $D = 12 - (-21) \times 7$
5. $E = (4 - 5) \times (-2 - 6)$
6. $F = 4 - 5 \times (-2 - 6)$

Solution

1. $A = -10 + 4 - 1 + 30 - 15 + 20 = -6 + 29 - 15 + 20 = 23 + 5$ donc $\boxed{A = 28}$.
2. $B = -15 - 14 + 30 - 15 - 9 = -14 + 30 - 30 - 9$ donc $\boxed{B = -23}$.
3. $C = (-3 - 6) \times (6 - 8) = (-9) \times (-2)$ donc $\boxed{C = 18}$.
4. $D = 12 - (-21) \times 7 = 12 + 21 \times 7 = 12 + 147$ donc $\boxed{D = 159}$.
5. $E = (4 - 5) \times (-2 - 6) = (-1) \times (-8)$ donc $\boxed{E = 8}$.
6. $F = 4 - 5 \times (-2 - 6) = 4 - 5 \times (-8) = 4 + 40$ donc $\boxed{F = 44}$.

Exercice 2. Les nombres suivants sont-ils entiers ?

$$A = \frac{2023}{2} \qquad B = \frac{91}{7} \qquad C = \sqrt{16} - \sqrt{25} \qquad D = 1 + \sqrt{2}.$$

Solution. $\frac{2023}{2} = 1011{,}5$ donc $\boxed{A \notin \mathbb{Z}}$.
$B = \dfrac{91}{7} = 13$ donc $\boxed{B \in \mathbb{Z}}$.
$C = \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1$ donc $\boxed{C \in \mathbb{Z}}$.
$1 < \sqrt{2} < 2$ donc $2 < D < 3$ et ainsi $\boxed{D \notin \mathbb{Z}}$.

Exercice 3. Sans utiliser la calculatrice, écrire sous forme de fractions irréductibles

$$A = \frac{5+3}{5+7} \quad B = \frac{3}{4} - \frac{2}{7} \quad C = \frac{9}{4} \times \frac{10}{21} \quad D = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{4}} \quad E = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{9}{21} \quad F = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2}.$$

Solution. $A = \dfrac{5+3}{5+7} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{4 \times 2}{4 \times 3}$ donc $\boxed{A = \dfrac{2}{3}}$.

$B = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{7} = \dfrac{3 \times 7}{4 \times 7} - \dfrac{2 \times 4}{7 \times 4} = \dfrac{21}{28} - \dfrac{8}{28} = \dfrac{21 - 8}{28}$ donc $\boxed{B = \dfrac{13}{28}}$.

$C = \dfrac{9}{4} \times \dfrac{10}{21} = \dfrac{3 \times 3}{2 \times 2} \times \dfrac{2 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 7}$ donc $\boxed{C = \dfrac{15}{14}}$.

$D = \dfrac{\frac{15}{14}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{15}{14} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 7} \times \dfrac{2 \times 2}{3 \times 1} = \dfrac{5 \times 2}{7 \times 1}$ donc $\boxed{C = \dfrac{10}{7}}$.

$E = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{21} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7 \times 1}{3 \times 1} \times \dfrac{3 \times 3}{3 \times 7} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{3} = \dfrac{2-3}{3}$ donc $\boxed{E = -\dfrac{1}{3}}$.

$F = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4}\right) \times \dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{9}{14} - \dfrac{4}{12}\right) \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{3 \times 4} \times \dfrac{3 \times 1}{2}$
donc $\boxed{F = \dfrac{5}{8}}$.

Exercice 4. Effectuer les calculs suivants sans utiliser la calculatrice et vérifier ensuite les résultats à l'aide de celle-ci.

$$1)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad 2)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} \qquad 3)\ \frac{4}{3}+\frac{3}{4}-1 \qquad 4)\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} \qquad 5)\ \frac{4}{3}\times\frac{3}{3}-1$$

$$6)\ \frac{4\times 91}{18\times 2}-\frac{91}{18}\times 2 \qquad 7)\ \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5} \qquad 8)\ \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \qquad 9)\ \frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$10)\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} \qquad 11)\ \frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}} \qquad 12)\ \frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}} \qquad 13)\ \frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\frac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}}$$

Solution. 1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{3\times 1}{3\times 2}$ donc $\boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}}$.

2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{1\times 6}{3\times 6}+\frac{1\times 3}{6\times 3}+\frac{1\times 2}{9\times 2}=\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{6+3+2}{18}$ donc $\boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}}$.

3) $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{4\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{12}{12}=\frac{16}{12}+\frac{9}{12}-\frac{12}{12}$ donc $\boxed{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{13}{12}}$.

4) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1\times 1}{3\times 6}$ donc $\boxed{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}}$.

5) $\frac{4}{3}\times\frac{3}{3}-1=\frac{4}{3}-\frac{3}{3}$ donc $\boxed{\frac{4}{3}\times\frac{3}{3}-1=\frac{1}{3}}$.

6) $\frac{4\times 91}{18\times 2}-\frac{91}{18}\times 2=\frac{2\times 2\times 91}{2\times 9\times 2}-\frac{91}{2\times 9}\times\frac{2\times 1}{1}=\frac{91}{9}-\frac{91}{9}$ donc $\boxed{\frac{4\times 91}{18\times 2}-\frac{91}{18}\times 2=0}$.

7) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\left(\frac{3\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 4}{3\times 4}\right)\times\frac{1}{5}=\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}$ donc $\boxed{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{12}}$.

8) $\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1\times 4}{3\times 4}-\frac{3\times 3}{4\times 3}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{4}{12}-\frac{9}{12}}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{12}\times\frac{5}{2}$ donc $\boxed{\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}=-\frac{25}{24}}$.

9) $\frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{1\times 2}{2\times 2}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{2}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=4\times\frac{4}{1}$ donc $\boxed{\frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=16}$.

10) $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}$$
$$=1+\frac{1}{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}=1+\frac{1}{\frac{7}{4}}=1+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}+\frac{4}{7}$$

donc $\boxed{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}}$.

11) $\frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2\times 3}{7\times 3}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1\times 3}{3\times 3}}=\frac{\frac{6}{21}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{3}{9}}=\frac{\frac{11}{21}}{\frac{2}{9}}=\frac{11}{21}\times\frac{9}{2}=\frac{11}{3\times 7}\times\frac{3\times 3}{2}$ donc $\boxed{\frac{\frac{2}{7}+\frac{5}{21}}{\frac{5}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{33}{14}}$.

12) $\frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2\times 5}{1\times 5}+\frac{1}{5}}{\frac{7\times 5}{1\times 5}-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{10}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{35}{5}-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{32}{5}}=\frac{11}{5}\times\frac{5}{32}$ donc $\boxed{\frac{2+\frac{1}{5}}{7-\frac{3}{5}}=\frac{11}{32}}$.

13) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}}=\dfrac{\frac{1\times2}{3\times2}-\frac{5\times3}{2\times3}}{\frac{3}{4}-\frac{1\times2}{2\times2}}\times\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7\times2}{3\times2}}{\frac{6}{6}-\frac{5}{6}}=\dfrac{\frac{2}{6}-\frac{15}{6}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}\times\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{14}{6}}{\frac{6}{6}-\frac{5}{6}}$

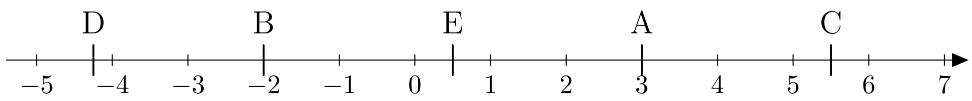
$$=\dfrac{-\frac{13}{6}}{\frac{1}{4}}\times\dfrac{\frac{19}{6}}{\frac{1}{6}}=-\frac{13}{6}\times\frac{4}{1}\times\frac{19}{6}\times\frac{6}{1}=-\frac{13\times2\times2\times19}{2\times3}$$

donc $\boxed{\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\times\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{7}{3}}{1-\frac{5}{6}}=-\dfrac{494}{3}}$.

Exercice 5. Sans utiliser la calculatrice, montrer que les fractions $\frac{203242}{23535}$ et $\frac{65311}{7432}$ ne sont pas égales.

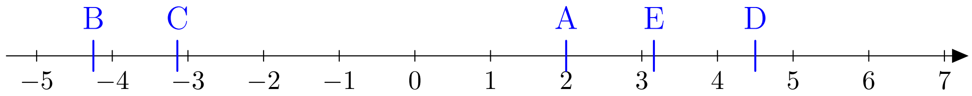
Solution. Pour montrer que les fractions ne sont pas égales, il suffit de montrer que les produits croisés ne sont pas égaux. Or, le chiffre des unités de 203242×7432 est 4 alors que le chiffre des unités de 23535×65311 est 5 donc ces produits ne sont pas égaux et ainsi les fractions ne sont pas égales.

Exercice 6. Sur la droite réelle ci-dessous, on a placé des points A, B, C, D et E. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses de ces points.



Solution. Avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de A est 3, celle de B est -2, celle de C est 5,5 et celle de D est $-4{,}3$.

Exercice 7. Sur la droite réelle ci-dessous, placer (avec la précision permise par le graphique) le point A d'abscisse 2, le point B d'abscisse $-\dfrac{17}{4}$, le point C d'abscisse $-\pi$, le point D d'abscisse $\dfrac{9}{2}$ et le point E d'abscisse $\sqrt{10}$.



Solution. Voir ci-dessus.

Exercice 8. Compléter en utilisant $\in$ ou $\notin$. On ne demande pas de justification.

$$5\in\mathbb{Z}\,;\quad \pi\in\mathbb{R}\,;\quad \frac{1}{3}\in\mathbb{Q}\,;\quad \frac{1}{10}\notin\mathbb{N}\,;\quad -3\in\mathbb{Z}\,;\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\,;\quad 0{,}75\in\mathbb{Q}\,;\quad \frac{10}{2}\in\mathbb{N}.$$

Solution. Voir-dessus.

Exercice 9. Calculer :

$$\text{a) } (-2)^4 \qquad \text{b) } -2^4 \qquad \text{c) } 1-4^2 \qquad \text{d) } (1-4)^2.$$

Solution a) $(-2)^4=\left[(-2)^2\right]^2=4^2$ donc $\boxed{(-2)^4=16}$.
b) $-2^4=-(2^2)^2=-4^2$ donc $\boxed{-2^4=-16}$.
c) $1-4^2=1-16$ donc $\boxed{1-4^2=-15}$.
d) $(1-4)^2=(-3)^2$ donc $\boxed{(1-4)^2=9}$.

Exercice 10. Sans calculatrice, déterminer les nombres égaux dans la liste ci-dessous.

$$A = 2^{100} \qquad B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} \qquad C = 100^2 \qquad D = 5^4 \times 2^4$$

$$E = (2^{20})^5 \qquad F = 200^2 \qquad G = 50^4 \qquad H = 10000$$

Solution. D'une part,

$$B = \frac{(-2)^{60}}{4^{-20}} = (-1 \times 2)^{60} \times 4^{60} = (-1)^{60} \times 2^{60} \times (2^2)^{20} = 1 \times 2^{60} \times 2^{2\times 20} = 2^{60+40} = 2^{100}$$

et

$$E = (2^{20})^5 = 2^{20\times 5} = 2^{100}$$

donc $\boxed{A = B = E}$.

D'autre part,

$$C = 100^2 = (10^2)^2 = 10^{2\times 2} = 10^4$$

et

$$D = (5 \times 2)^4 = 10^4$$

donc $\boxed{C = D = H}$.

Exercice 11. Effectuer, sans calculatrice, les opérations suivantes.

$$1 + 3^2 \qquad 2 \times 5^3 \qquad (2 \times 5)^3 \qquad 2^{-1} + 5^{-2} \qquad 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$$

Solution. $1 + 3^2 = 1 + 9$ donc $\boxed{1 + 3^2 = 10}$.

$2 \times 5^3 = (2 \times 5) \times 5^2 = 10 \times 25$ donc $\boxed{2 \times 5^3 = 250}$.

$(2 \times 5)^3 = 10^3$ donc $\boxed{(2 \times 5)^3 = 1000}$.

$2^{-1} + 5^{-2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{25}{50} + \dfrac{2}{50}$ donc $\boxed{2^{-1} + 5^{-2} = \dfrac{27}{50}}$.

$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{4}{8} + \dfrac{2}{8} + \dfrac{1}{8}$ donc $\boxed{2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \dfrac{7}{8}}$.

Exercice 12. Effectuer les calculs suivants sans calculatrice.

$$1)\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad 2)\ 7^5 \times \left(\frac{2}{7}\right)^6 \qquad 3)\ \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \qquad 4)\ \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3}.$$

Solution.

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1^5}{2^5}$ donc $\boxed{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}}$.

2) $7^5 \times \left(\frac{2}{7}\right)^6 = \dfrac{7^5}{1} \times \dfrac{2^6}{7^6} = \dfrac{7^5 \times 1}{1} \times \dfrac{2^6}{7^5 \times 7} = \dfrac{2^6}{7}$ donc $\boxed{7^5 \times \left(\frac{2}{7}\right)^6 = \dfrac{64}{7}}$.

3) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{3^4}{4^4} \times \dfrac{4^3}{3^3} = \dfrac{3^3 \times 3}{4^3 \times 4} \times \dfrac{4^3 \times 1}{3^3 \times 1}$ donc $\boxed{\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 = \dfrac{3}{4}}$.

4) $\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3} = \dfrac{\frac{7^2}{5^2}}{\frac{7^3}{10^3}} = \dfrac{7^2}{5^2} \times \dfrac{10^3}{7^3} = \dfrac{7^2 \times 1}{5^2 \times 1} \times \dfrac{(2 \times 5)^3}{7^2 \times 7} = \dfrac{1}{5^2 \times 1} \times \dfrac{2^3 \times 5^2 \times 5}{7} = \dfrac{2^3 \times 5}{7}$ donc $\boxed{\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\frac{7}{10}\right)^3} = \dfrac{40}{7}}$.

Exercice 13. Soit a et b deux réels non nuls. Écrire les nombres suivants sous la forme $a^n b^m$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

$$A = a^2 \times b^3 \times \frac{a}{b} \qquad B = \frac{1}{a^4 b^7} \qquad C = \frac{a^{-2}b}{a^{-6}b^3} \qquad D = a \times \frac{1}{b^3} \times \left(\frac{a^2 b}{a^{-1}b^3}\right)^2 \qquad E = \left[(ab^2)^{-2}\right]^3.$$

Solution.
$A = a^2 \times b^3 \times a \times b^{-1} = a^{2+1}b^{3-1}$ donc $\boxed{A = a^3 b^2}$.
$B = (a^4 b^7)^{-1}$ donc $\boxed{B = a^{-4}b^{-7}}$.
$C = a^{-2}b \times a^6 b^{-3} = a^{-2+6}b^{1-3}$ donc $\boxed{C = a^4 b^{-2}}$.
$D = ab^{-3} \times \dfrac{(a^2b)^2}{(a^{-1}b^3)^2} = ab^{-3}a^{2\times 2}b^2 \times \dfrac{1}{a^{-1\times 2}b^{3\times 2}} = a^{1+4}b^{-3+2}a^2b^{-6} = a^{5+2}b^{-1-6}$ donc $\boxed{D = a^7 b^{-7}}$.
$E = (ab^2)^{-2\times 3} = (ab^2)^{-6} = a^{-6}b^{2\times(-6)}$ donc $\boxed{E = a^{-6}b^{-12}}$.

Exercice 14. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{4} \qquad B = \sqrt{(-6)^2} \qquad C = \sqrt{11}^2 \qquad D = \sqrt{5^4}$$

$$E = \sqrt{81 \times 49} \qquad F = \sqrt{16 \times 121} \qquad G = \sqrt{169 \times 64}$$

Solution. $\boxed{A = 2}$, $\boxed{B = \sqrt{36} = 6}$, $\boxed{C = 11}$, $D = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2$ donc $\boxed{D = 25}$, $E = \sqrt{81}\sqrt{49} = 9 \times 7$ donc $\boxed{E = 63}$, $F = \sqrt{16}\sqrt{121} = 4 \times 11$ $\boxed{F = 44}$ et $G = \sqrt{169}\sqrt{64} = 13 \times 8$ $\boxed{G = 104}$.

Exercice 15. Calculer les nombres suivants sans calculatrice.

$$A = \sqrt{\frac{81}{16}} \qquad B = \sqrt{\frac{25 \times 81}{64}} \qquad C = \sqrt{49} \times \sqrt{\frac{16}{25}}$$

Solution. $A = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}$ donc $\boxed{A = \dfrac{9}{4}}$, $B = \dfrac{\sqrt{25}\sqrt{81}}{\sqrt{64}} = \dfrac{5 \times 9}{8}$ donc $\boxed{B = \dfrac{45}{8}}$ et $C = 7 \times \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = 7 \times \dfrac{4}{5}$ donc $\boxed{C = \dfrac{28}{5}}$.

Exercice 16. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels.

$$A = \sqrt{50} \qquad B = \sqrt{200} \qquad C = \sqrt{147} \qquad D = \sqrt{54}$$

$$E = \sqrt{8} + \sqrt{18} \qquad F = \sqrt{75} + \sqrt{48} + \sqrt{12} \qquad G = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$$

Solution.
$A = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25}\sqrt{2}$ donc $\boxed{A = 5\sqrt{2}}$.
$B = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{100}\sqrt{2}$ donc $\boxed{B = 10\sqrt{2}}$.
$C = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49}\sqrt{3}$ donc $\boxed{C = 7\sqrt{3}}$.
$D = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9}\sqrt{6}$ donc $\boxed{D = 3\sqrt{6}}$.
$E = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ donc $\boxed{E = 5\sqrt{2}}$.
$F = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} + \sqrt{16}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ donc $\boxed{F = 11\sqrt{3}}$.
$G = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} - \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{100}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$ donc $\boxed{G = 11\sqrt{3}}$.

Exercice 17. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$A(x) = 4(3-5x) \qquad B(y) = 1-2(y+2)+3(3-2y)$$

$$C(x) = (1-4x)(5+x) \qquad D(x) = 3\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right)$$

$$E(q) = (3q+1)(3-q)(2q+1) \qquad F(x) = \left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{7}+\frac{1}{3}x\right)$$

Solution.

$\boxed{A(x) = 12-20x}$.

$B(x) = 1-2y-4+9-6y$ donc $\boxed{B(x) = -8y+6}$.

$C(x) = 5+x-20x-4x^2$ donc $\boxed{C(x) = -4x^2-19x+5}$.

$D(x) = \left(9x-\frac{3}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{3}\right) = 18x^2+3x-3x-\frac{1}{2}$ donc $\boxed{D(x) = 18x^2-\frac{1}{2}}$.

$E(x) = (9q-3q^2+3-q)(2q+1) = (-3q^2+8q+3)(2q+1) = -6q^3-3q^2+16q^2+8q+6q+3$ donc $\boxed{E(x) = -6q^3+13q^2+14q+3}$.

$F(x) = -\frac{1}{14}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{6}{35}-\frac{1}{5}x = \frac{1}{12}x^2-\frac{19}{70}x+\frac{6}{35}$

Exercice 18. Développer, réduire et éventuellement ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$f(x) = (x+2)^2 \qquad g(n) = (2-7n)^2$$

$$h(x) = (7-4x)(7+4x) \qquad i(x) = (5-2x)^2-(1+3x)^2$$

$$j(u) = 2u+4u^2-(2u+1)^2 \qquad E(a,b) = (a+b)^2-(a-b)^2$$

Solution.

$\boxed{f(x) = x^2+4x+4}$.

$g(n) = 4-28n+(7n)^2$ donc $\boxed{g(n) = 49n^2-28n+4}$.

$h(x) = 7^2-(4x)^2$ donc $\boxed{h(x) = -16x^2+49}$.

$i(x) = (25-20x+4x^2)-(1+6x+9x^2) = 25-20x+4x^2-1-6x-9x^2$ donc $\boxed{i(x) = -5x^2-26x+24}$.

$j(u) = 2u+4u^2-(4u^2+2u+1) = 2u+4u^2-4u^2-4u-1$ donc $\boxed{j(u) = -2u-1}$.

$E(a,b) = (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) = a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$ donc $\boxed{E(a,b) = 4ab}$.

Exercice 19. Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes les expressions suivantes.

$$A(x) = (1+x^2)^2+3(2-3x) \quad B(x) = (1-x)(1+x+x^2+x^3) \quad C(a) = (a+1)(3-2a)(2-5a)$$

Solution.

$A(x) = 1+2x^2+x^4+6-9x$ donc $\boxed{A(x) = x^4+2x^2-9x+7}$.

$B(x) = 1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3-x^4$ donc $\boxed{B(x) = -x^4+1}$.

$C(a) = (3a-2a^2+3-2a)(2-5a) = (-2a^2+a+3)(2-5a) = -4a^2+10a^3+2a-5a^2+6-15a$ donc $\boxed{C(a) = 10a^3-9a^2-13a+6}$.

Exercice 20. Calculer sans calculatrice 999^2 et 1001^2.

Solution.
$999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2\times 1000 + 1 = 1000000 - 2000 + 1$ donc $\boxed{999^2 = 998001}$.
$1001^2 = (1000+1)^2 = 1000^2 + 2\times 100 + 1 = 1000000 + 2000 + 1$ donc $\boxed{1001^2 = 1002001}$.

Exercice 21.

1. Soit x un réel. Développer et réduire $(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$

2. Utiliser le résultat précédent pour trouver rapidement sans utiliser la calculatrice :

$$297\times 295 - 298\times 294.$$

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2) = x^2-1^2-(x^2-2^2) = x^2-1-(x^2-4) = x^2-1-x^2+4$$

donc $\boxed{(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)=3}$.

2. En utilisant le résultat précédent avec $x=296$, il vient

$$297\times 295 - 298\times 294 = (286+1)(296-1)-(296+2)(296-2) = 3.$$

Exercice 22. Écrire plus simplement les nombres suivants.

a) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{8}{2\sqrt{3}-4}$.

Solution.
a) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1^2-\sqrt{2}^2 = 1-2$ donc $\boxed{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1}$.
b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = \sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}^3+(\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}^2) = 2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}+3$ donc $\boxed{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=10}$.
c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}}$.
d) $\dfrac{8}{2\sqrt{3}-4} = \dfrac{8(2\sqrt{3}+4)}{(2\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}+4)} = \dfrac{8(2\sqrt{3}+4)}{(2\sqrt{3})^2-4^2} = \dfrac{8(2\sqrt{3}+4)}{4\times 3-16} = \dfrac{8(2\sqrt{3}+4)}{-4}$
$= -2(2\sqrt{3}+4)$ donc $\boxed{\dfrac{8}{2\sqrt{3}-4} = -4\sqrt{3}-8}$.
e) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}-\dfrac{7}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}-\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}{7\times\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}-\dfrac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7}^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}-\dfrac{7\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\sqrt{7}-7\sqrt{7}}{7}$ donc $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}}{7}-\dfrac{7}{\sqrt{7}} = -\dfrac{6\sqrt{7}}{7}}$.

Exercice 23. On pose $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et $b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

1. Calculer ab et en déduire la valeur de $(a+b)^2$.

2. En déduire une expression simplifiée de $a+b$.

Solution.

1. $ab = \sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{7^2-(4\sqrt{3})^2} = \sqrt{49-16\times 3}$
$= \sqrt{49-48} = \sqrt{1}$ donc $\boxed{ab=1}$.
Dès lors, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = a^2+2\times 1+b^2 = 7+4\sqrt{3}+2+7-4\sqrt{3}$ donc $\boxed{ab=16}$.

2. Comme a et b sont positifs, $a+b$ aussi donc $a+b=\sqrt{16}$ donc $\boxed{a+b=4}$.

Exercice 24. Factoriser les expressions suivantes en remarquant un facteur commun.

$$A(x,y)=3x+3y \qquad B(q)=-6(1+2q)+6(q+3) \qquad C(x)=x+x(2+5x)$$

$$D(x)=(4x-3)(x+1)+x(4x-3) \qquad E(x)=(2x-5)^2-3(1-x)(2x-5)$$

Solution.
$\boxed{A(x,y)=3(x+y)}$.
$B(q)=6[-(1+2q)+(q+3)]=6(-1-2q+q+3)$ donc $\boxed{B(q)=6(-q+2)}$.
$C(x)=x\times 1+x(2+5x)=x[1+(2+5x)]$ donc $\boxed{C(x)=x(5x+3)}$.
$D(x)=(4x-3)[(x+1)+x]$ donc $\boxed{D(x)=(4x-3)(2x+1)}$.
$E(x)=(2x-5)(2x-5)-3(1-x)(2x-5)=(2x-5)[(2x-5)-3(1-x)]$
$=(2x-5)(2x-5-3+3x)$
donc $\boxed{E(x)=(2x-5)(5x-8)}$.

Exercice 25. Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.

$$A(x)=x^2+6x+9 \qquad B(y)=y^2-49 \qquad C(x)=36x^2-4$$

$$D(n)=4(5n+3)^2-9(n-1)^2 \qquad E(u)=\frac{1}{4}u^2+u+1 \qquad F(x)=(x+4)^2-2(x+4)+1$$

Solution.
$A(x)=x^2+2\times x\times 3+3^3$ donc $\boxed{A(x)=(x+3)^2}$.
$B(y)=y^2-7^2$ donc $\boxed{B(y)=(y-7)(y+7)}$.
$C(x)=(6x)^2-2^2$ donc $\boxed{C(x)=(6x-2)(6x+2)}$.
$D(n)=[2(5n+3)]^2-[3(n-1)]^2=[2(5n+3)-3(n-1)][2(5n+3)+3(n-1)]$
$=(10n+6-3n+3)(10n+6+3n-3)$
donc $\boxed{D(x)=(7n+9)(13n+3)}$.
$E(u)=\left(\frac{1}{2}u\right)^2+2\times\frac{1}{2}u\times 1+1^2$ donc $\boxed{E(u)=\left(\frac{1}{2}u+1\right)^2}$.
$F(x)=(x+4)^2-2\times(x+4)\times 1+1^2=(x+4-1)^2$ donc $\boxed{F(x)=(x+3)^2}$.

Exercice 26. Factoriser les expressions.

$$A(x)=3(x-4)^2+(4-x)(x+2) \qquad B(x)=(3x-2)^2+(2x+9)(4-6x)$$
$$C(y)=y^2-4y+4+3(y-2)^2 \qquad D(n)=25n^2-4+(5n+2)(4n-7)$$

Solution.
$A(x)=3(x-4)(x-4)-(x-4)(x+2)=(x-4)[3(x-4)-(x+2)]$
$=(x-4)(3x-12-x-2)=(x-4)(2x-14)$
donc $\boxed{A(x)=2(x-4)(x-7)}$.
$B(x)=(3x-2)(3x-2)+(2x+9)(-2)(3x-2)=(3x-2)[(3x-2)+(-2)(2x+9)]$
$=(3x-2)(3x-2-4x-18)$
donc $\boxed{B(x)=(3x-2)(-x-20)}$.
$C(y)=y^2-2\times 2\times y+4^2+3(y-2)^2=(y-2)^2+3(y-2)^2$ donc $\boxed{C(y)=4(y-2)^2}$.
$D(n)=(5n)^2-2^2+(5n+2)(4n-7)=(5n-2)(5n+2)+(5n+2)(4n-7)$
$=(5n+2)[(5n-2)+(4n-7)]=(5n+2)(9n-9)$
donc $\boxed{D(n)=9(5n+2)(n-1)}$.

Exercice 27. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 2x + 1 + (2x+1)(x+3) \qquad B(x) = x^2 + 4x$$
$$C(x) = x^2 + 6x + 9 + (2-5x)(x+3) \qquad D(x) = (2x+1)(7x-1) - 1 - 2x$$
$$E(x) = (3x+6)(1-4x) + (x+2)^2 \qquad F(x,y) = x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$$

Solution.
$A(x) = (2x+1)\times 1 + (2x+1)(x+3) = (2x+1)[1+(x+3)]$ donc $\boxed{A(x) = (2x+1)(x+4)}$.
$B(x) = x \times x + 4 \times x$ donc $\boxed{B(x) = x(x+4)}$
$C(x) = x^2 + 2\times x\times 3 + 3^2 + (2-5x)(x+3) = (x+3)^2 + (2-5x)(x+3) = (x+3)[(x+3)+(2-5x)]$ donc $\boxed{C(x) = (x+3)(-4x+5)}$.
$D(x) = (2x+1)(7x-1) - (2x+1)\times 1 = (2x+1)[(7x-1)-1]$ donc $\boxed{D(x) = (2x+1)(7x-2)}$.
$E(x) = 3(x+2)(1-4x) + (x+2)(x+2) = (x+2)[3(1-4x)+(x+2)] = (x+2)(3-12x+x+2)$ donc $\boxed{E(x) = (x+2)(-11x+5)}$.
$F(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 - y^2 + 4y - 3 = (x+1)^2 - (y^2 - 4y + 4) = (x+1)^2 - (y-2)^2$
$= [(x+1)-(y-2)][(x+1)+(y-2)]$
donc $\boxed{F(x) = (x-y+3)(x+y-1)}$.

Exercice 28. Soit x un réel différent de 1 et 2. Simplifier $A(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2}$.

Solution.

$$A(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2-2x-(x^2+-1)}{x^2-x-2x+1} = \frac{x^2-2x-x^2+1}{x^2-3x+1}$$

donc $\boxed{A(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2-3x+1}}$.

Exercice 29. Soit x un réel différent de 3 et -3. Simplifier $B(x) = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x+2}{x+3}$.

Solution.

$$B(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2x-6+x^2-3x+2x-6}{x^2-9}$$

donc $\boxed{B(x) = \dfrac{2x^2-12}{x^2-9}}$.

Exercice 30. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $C(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.

Solution.

$$C(n) = \frac{n}{(n+1)n} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \text{ donc } \boxed{C(n) = \frac{-1}{n(n+1)}}.$$

Exercice 31. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier $D(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$.

Solution.

$$\begin{aligned} D(n) &= \frac{n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{D(n) = \frac{-1}{n(n+1)^2}}$.

Exercice 32. Soit t un réel différent de 0 et -1. Simplifier $E(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)}$

Solution.

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{(t+1)^2}{t(t+1)^2} - \frac{t}{t(t+1)^2} - \frac{1}{t(t+1)} = \frac{t^2+2t+1-t}{t(t+1)^2} - \frac{t+1}{t(t+1)^2} \\ &= \frac{t^2+t+1-(t+1)}{t(t+1)^2} = \frac{t^2}{t(t+1)^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{E(t) = \frac{t}{(t+1)^2}}$.

Exercice 33. Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifier $\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)$.

Solution. En reconnaissant une identité remarquable,

$\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) = \sqrt{t^2+1}^2 - 1^2 = t^2+1-1$ donc $\boxed{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) = t^2}$.

Exercice 34. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sqrt{(x^2-1)^2+4x^2}$

Solution. Étant donné que $(x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1^2 = x^4 - 2x^2 + 1$,

$$\sqrt{(x^2-1)^2+4x^2} = \sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2} = \sqrt{x^4+2x^2+1} = \sqrt{(x^2+1)^2}$$

et donc, comme $x^2+1 \geqslant 0$, $\boxed{\sqrt{(x^2-1)^2+4x^2} = x^2+1}$.

Exercice 35. Soit a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Simplifier au maximum

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}} &= \frac{\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}-\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}} = \frac{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}} \\
&= \frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)} \times \frac{(a-b)(a+b)}{a(a+b)-b(a-b)} \\
&= \frac{a(a-b)+b(a+b)}{a(a+b)-b(a-b)} \\
&= \frac{a^2-ab+ba+b^2}{a^2+ab-ab+b^2} \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

et donc, finalement, $\boxed{\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}} = 1}$.