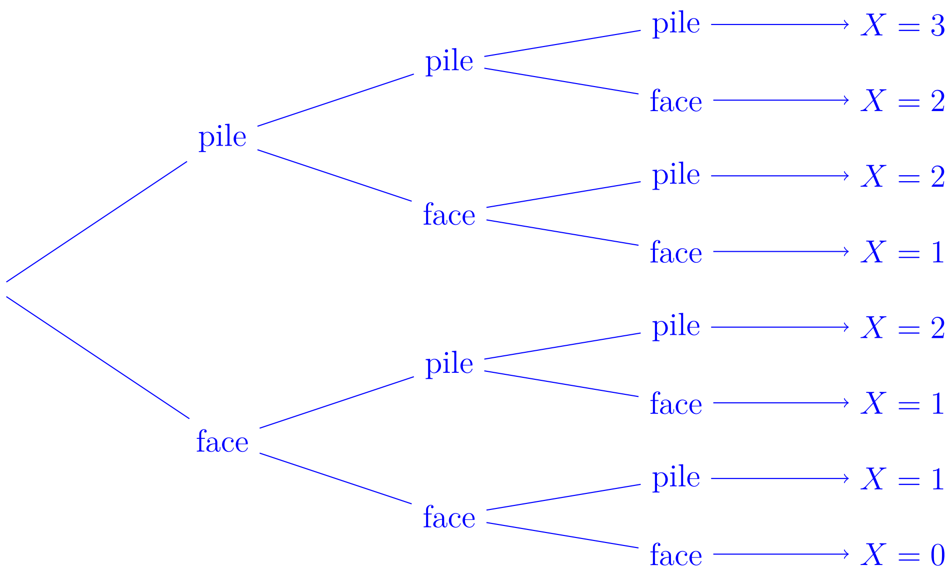
♦ Corrigés des exercices du chapitre 19

Exercice 1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants.

1. On tire une boule dans une urne contenant 20 boules qui portent le numéro 2 et 30 boules qui portent le numéro 3, et on note X le numéro de la boule obtenue.
2. On lance 3 fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile obtenus.
3. On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires et on note X le nombre de boules blanches obtenues en tout.
4. Dans la même urne que celle de l'exemple précédent, on effectue trois tirages sans remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues en tout.

Solution.

1. $X(\Omega) = \{2\,3\}$ et, comme il y a équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$ et $\mathbf{P}(X = 3) = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$.
2. $X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$. Pour déterminer les probabilités, on peut utiliser une arbre :



Toutes les branches sont équiprobables donc tous les chemins le sont aussi. Ainsi, on a donc $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.
On conclut que la loi est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

3. $X(\Omega) = \{0\,;1\,;3\}$. Notons B_i : « Tirer une boule blanche au i-ème tirage » pour $i \in \{1\,;2\}$. Alors,
$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbf{P}(\overline{B_1})\mathbf{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{1}{3}$
$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$
$\mathbf{P}(X = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 2) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{8}{15}$
On conclut que la loi est donc donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{8}{15}$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont le loi est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

1. Déterminer l'univers image de X.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \leqslant 2\}$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \geqslant 3\}$.
4. Calculer de deux façons différentes $\mathbf{P}(X > 0)$.

Solution.

1. Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3 et 4 donc $\boxed{X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}}$.
2. Comme les évènements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$ et $\{X = 2\}$ sont incompatibles,
$$\mathbf{P}(X \leqslant 2) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1$$
i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 2) = 0{,}6}$.
3. De même, $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}1$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 0{,}4}$.
On pouvait aussi remarquer que $\{X \geqslant 3\} = \overline{\{X \leqslant 2\}}$ donc $\mathbf{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
4. De même, on peut utiliser l'incompatibilité des évènements $\{X = k\}$ pour écrire
$$\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1$$
i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X > 0) = 0{,}8}$ ou utiliser l'évènement complémentaire et écrire $\mathbf{P}(X > 0) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - 0{,}2$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X > 0) = 0{,}8}$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire dont le loi est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-5	-1	0	2	7
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,15	p	0,5	0,1

1. Déterminer l'univers image de X.
2. Déterminer la valeur de p.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant 2)$.
4. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$.

Solution.

1. Les valeurs prises par X sont -5, -1, 0, 2 et 7 donc $\boxed{X(\Omega) = \{-5\,;-1\,;0\,;2\,;7\}}$.
2. Comme $(\{X = k\})_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements, $0{,}2 + 0{,}15 + p + 0{,}5 + 0{,}1 = 1$ donc $0{,}95 + p = 1$ et ainsi $\boxed{p = 0{,}05}$.

3. Sachant que $\{X = 2\}$ et $\{X = 7\}$ sont incompatibles,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 2) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 7) = 0{,}5 + 0{,}1$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X \geqslant 2) = 0{,}6}$.

4. $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = 1 - \mathbf{P}(X > 0) = 1 - \mathbf{P}(X \geqslant 2) = 1 - 0{,}6$ donc $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 0) = 0{,}4}$.
On pouvait calculer cette probabilité de la manière suivante, en utilisant que les événements $\{X = -5\}$, $\{X = -1\}$ et $\{X = 0\}$ sont incompatibles :

$$\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \mathbf{P}(X = -5) + \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 0) = 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}4.$$

Exercice 4. Une entreprise fabrique des machines à laver. Son service qualité note, sur un échantillon de 112 machines à laver prélevées au hasard, au bout de combien de temps survient la première panne.

Par exemple, lorsque la panne arrive au bout de 4 ans et 3 mois, soit au cours de la cinquième année, on note « 5 ans » comme date de la première panne.

Date de la 1^{re} panne (en année)	4	5	7	8	10
Nombre d'appareils	6	11	37	45	13

On suppose que l'échantillon est représentatif de la production de l'entreprise et on note X la variable aléatoire modélisant la date, en année, de la première panne d'une machine à laver prise au hasard.

1. **a.** Déterminer l'univers image de X.

b. Déterminer la loi de X.

2. Chaque machine bénéficie d'une garantie de 5 ans. Quelle est la probabilité qu'une machine à laver tombe en panne pendant la période de garantie ?

3. Un client acquiert une extension de garantie de 2 ans lors de l'achat de sa machine à laver. Y a-t-il plus d'une chance sur deux pour que sa machine à laver tombe en panne pendant la période de garantie ?

Solution.

1. **a.** La variable aléatoire X prend les valeurs 4, 5, 7, 8 et 10 i.e. $\boxed{X(\Omega) = \{4\,;5\,;7\,;8\,;10\}}$.

b. Pour déterminer la loi de X, on utilise les fréquences données par le tableau de l'énoncé :

x_i	4	5	7	8	10
$p(X = x_i)$	$\dfrac{3}{56}$	$\dfrac{11}{112}$	$\dfrac{37}{112}$	$\dfrac{45}{112}$	$\dfrac{13}{112}$

2. Comme $\{X = 4\}$ et $\{X = 5\}$ sont incompatibles, La probabilité que la machine tombe en panne pendant la période de garantie est $\mathbf{P}(X \leqslant 5) = \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5) = \dfrac{3}{56} + \dfrac{11}{112}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 5) = \dfrac{17}{112}}$.

3. Avec l'extension, la période de garantie est de 7 ans. Ainsi, comme précédemment, la probabilité que la machine tombe en panne pendant cette période est

$$\mathbf{P}(X \leqslant 7) = \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5) + \mathbf{P}(X = 7) = \frac{3}{56} + \frac{11}{112} + \frac{37}{112} = \frac{27}{56} < 0{,}5.$$

Ainsi, il y a moins d'une chance sur deux que la machine tombe en panne pendant la période de garantie.

Exercice 5. Une entreprise produit en série des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts : le défaut S de nature esthétique et le défaut F de fonctionnement. Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que le défaut S est présent sur 16 objets, le défaut F est présent sur 12 objet et que 180 objets sont déclarés parfaits.
   Recopier et compléter le tableau suivant.

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

2. On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu. On sait que le coût de fabrication d'un objet est 200 € et que le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.
   Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15% du prix. Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 45 €. Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 58 €. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euro, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

Solution.

1.

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S	8	8	16
Sans le défaut S	4	180	184
Total	12	188	200

2. a. Si l'objet n'a aucun défaut, le bénéfice algébrique est $250 - 200 = 50$ euros.
Si l'objet présente seulement le défaut S, le bénéfice algébrique est $250 \times (1 - \frac{15}{100}) - 200 = 12{,}5$ euros.
Si l'objet présente seulement le défaut F, le bénéfice algébrique est $250 - 200 - 45 = 5$ euros.
Si l'objet présente les deux défauts, le bénéfice algébrique est $250 - 200 - 58 = -8$ euros.
Ainsi, $X(\Omega) = \{50\,;12{,}5\,;5\,;-8\}$. Or, d'après le tableau, $\mathbf{P}(X = 50) = \dfrac{180}{200} = \dfrac{9}{10}$, $\mathbf{P}(X = 12{,}5) = \dfrac{8}{200} = \dfrac{2}{25}$, $\mathbf{P}(X = 5) = \dfrac{4}{200} = \dfrac{1}{50}$ et $\mathbf{P}(X = -8) = \dfrac{8}{200} = \dfrac{1}{50}$
On en déduit que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	50	12,5	5	-8
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$

b. $\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \mathbf{P}(X = -8)$ soit $\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant 0) = \frac{1}{25}}$. Cela signifie que pour chaque objet vendu, l'entreprise a une probabilité $\frac{1}{25}$ de perdre de l'argent c'est-à-dire de travailler à perte.

Exercice 6. Une entreprise est chargée d'entretenir un distributeur de boisson dans la salle d'attente d'une gare. On sait que 40% des boissons distribuées sont des cafés courts et que 45% sont des cafés longs et le reste des chocolats chauds. Le coût d'une boisson pour l'entreprise est 0,10 €. Le prix de vente d'un café court est 0,40 €, celui d'un café long 0,50 € et celui d'un chocolat 0,60 €.

On note X la variable aléatoire égale au bénéfice réalisé par l'entreprise pour une boisson vendue exprimé en euro.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat obtenu.
3. Si 2500 boissons sont vendues en un mois, quel est le bénéfice peut espérer réaliser par l'entreprise durant ce mois ?

Solution.

1. La variable aléatoire X prend les valeurs $0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$, $0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$ et $0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5$. On déduit des données de l'énoncé que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0,3	0,4	0, 5
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,4	0,45	0,15

2. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}45 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}5$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(X) = 0{,}375}$.
Cela signifie que le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise est 0,375 euro par boisson.

3. Notons X_i le bénéfice réalise sur la vente de la i-ème boisson. Alors, le bénéfice total est $S = \sum_{i=1}^{2500} X_i$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^{2500} \mathbf{E}(X_i)$ et, d'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, 2500]\!]$, $\mathbf{E}(X_i) = 0{,}375$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'espérance de } S \text{ est } 0{,}375 \times 2500 = 937{,}5 \text{ euros}}$.

Exercice 7. Une urne contient 8 boules noires et 4 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. On note B la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues.
   a. Quel est l'univers image de B ?
   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire B.

c. En déduire l'espérance de B.

2. On suppose que le joueur paye une mise initiale de 2 euros, puis qu'à l'issue du tirage, il récupère B euros, où B est la variable aléatoire de la question précédente.
On note G le gain algébrique réalisé par le joueur.

a. Exprimer G en fonction de B.

b. Quel est le gain moyen d'un joueur ?

c. Quelle devrait être la mise initiale pour que le jeu devienne favorable au joueur ?

Solution.

1. a. On obtient entre 0 et 3 boules bleues donc $\boxed{B(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}}$.

b. Le nombre total de tirages possibles est

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = \frac{6 \times 2 \times 110}{6} = 220.$$

Il y a équiprobabilité sur ces 220 tirages donc

$$\mathbf{P}(B=0) = \frac{\binom{8}{3}}{220} = \frac{\frac{8\times7\times6}{3!}}{220} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$
$$\mathbf{P}(B=1) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{8}{2}}{220} = \frac{4 \times \frac{8\times7}{2}}{220} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$$
$$\mathbf{P}(B=2) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{1}}{220} = \frac{\frac{4\times3}{2} \times 8}{220} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$
$$\mathbf{P}(B=3) = \frac{\binom{4}{3}}{220} = \frac{\frac{4\times3\times2}{3!}}{220} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

On peut donc résumer la loi de B dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

c. On en déduit que

$$\mathbf{E}(B) = 0 \times \frac{14}{55} + 1 \times \frac{28}{55} + 2 \times \frac{22}{55} + 3 \times \frac{1}{55} = \frac{75}{55}$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(B) = \frac{15}{11}}$.

2. a. Le joueur mise 2 euros et gagne B euros donc $\boxed{G = B - 2}$.

b. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(G) = \mathbf{E}(B) - 2 = \frac{15}{11} - 2 = -\frac{7}{11} \approx -0{,}64$.

Ainsi, $\boxed{\text{le gain moyen du joueur est } -\frac{7}{11} \text{ euros soit environ } -64 \text{ centimes}}$.

c. Si la mise initiale et m alors $G = B - m$ et, par le même raisonnement, $\mathbf{E}(G) = \frac{15}{11} - m$.
Ainsi, le jeu est favorable au joueur si $\frac{15}{11} - m > 0$ i.e. $m < \frac{15}{11}$. Or, $\frac{15}{11} \approx 1{,}364$ donc $\boxed{\text{la mise doit être inférieure ou égale à 1,35 euros}}$ pour que le jeu devient favorable au joueur.

Exercice 8. Un jeu consiste à tirer, successivement et avec remise, trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Le joueur mise 10 €. Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 €, si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 €, si une seule boule tirée est rouge, il gagne 4 € et, dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

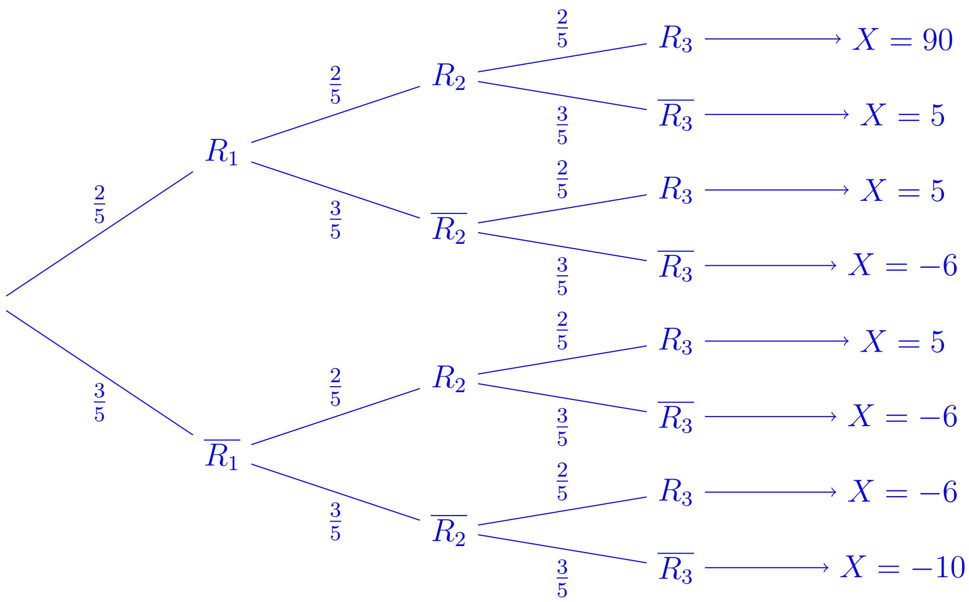
3. Inquiet pour son avenir, l'organisateur envisage d'augmenter la mise d'un nombre entier d'euros. Quel montant minimal d'augnemtation faut-il lui conseiller ?

Solution.

1. Les valeurs prises par X sont $0-10=-10$, $4-10=-6$, $15-10=5$ et $100-10=90$. Ainsi, $X(\Omega)=\{-10\,;-6\,;5\,;90\}$.

Comme les tirages sont équiprobables, on modélise un tirage par l'équiprobabilité sur l'ensemble des 10 boules. Comme il y a remise de la boule tirée, à chaque tirage, la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

On peut représenter l'expérience par l'arbre suivant en notant R_i l'évènement « le joueur tire une boule rouge au i−ème tirage ».



On en déduit que

$$\mathbf{P}(X=-10)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$
$$\mathbf{P}(X=-6)=3\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$$
$$\mathbf{P}(X=5)=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$$
$$\mathbf{P}(X=90)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

Ainsi, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-10	-6	5	90
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

2. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = \frac{27}{125} \times (-10) + \frac{54}{125} \times (-6) + \frac{36}{126} \times 5 + \frac{8}{125} \times 90$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{306}{125} \approx 2{,}45}$.
Cela signifie qu'en moyenne un joueur gagne environ 2,45 euros à chaque partie.

3. En moyenne, l'organisateur perd donc 2,45 euros par partie. Pour ne pas perdre d'argent, il doit augmenter la mise de telle sorte que l'espérance soit négative ou nulle. Notons b l'augmentation de la mise cherchée. Le nouveau gain algébrique est alors $Y = X - b$ donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(X) - b = 2{,}45 - b$. Ainsi, $E(Y) \leqslant 0$ si et seulement si $2{,}45 - b \leqslant 0$ ce qui équivaut donc à $b \geqslant 2{,}45$. Ainsi, pour ne pas perdre d'argent, l'organisateur doit augmenter la mise d'au moins 2,45 euros. Comme on demande un nombre entier d'euro, $\boxed{\text{l'organisateur doit augment la mise d'au moins 3 euros}}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, et ainsi de suite jusqu'à n. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne contient k boules qui portent le numéro k. On tire une boule au hasard dans l'urne et on note X son numéro.

1. Combien l'urne contient-elle de boules en tout ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Calculer $\mathbf{V}(X)$.

Solution.

1. L'urne contient au total $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ boules.

2. Par définition, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne contient k boules portant le numéro k donc, par équiprobabilité, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}}.$$

3. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

donc $\boxed{\mathbf{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. ».

Initialisation. D'une part, $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et, d'autre part, $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} = (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

5. Par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

donc $\mathbf{E}(X^2) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Par la formule de König-Huygens, on en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{(2n+1)}{3}\right)^2 = \frac{9n^2+9n-2(4n^2+4n+1)}{18}$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2+n-2}{18}}$.

Exercice 10.

1. Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes : la panne « a » ou la panne « b ». On admet que 5% des appareils sont concernés par la panne « a », 3% par la panne « b » et 1% par les deux pannes. On prélève au hasard un appareil dans la production. On définit l'évènement A (resp. B) « l'appareil présente la panne « a » (resp. « b ») ».

a. Montrer que la probabilité que cet appareil présente la panne « a » ou la panne « b » est 0,07

b. Quelle est la probabilité que cet appareil de présente la panne « a » mais pas la panne « b » ?

c. Quelle est la probabilité que cet appareil ne présente aucune des deux pannes ?

2. L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise et la réparation d'une panne « b » coûte 40 €. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total

a. Quel est l'univers image de X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

d. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\sigma(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

Solution.

1. **a.** La probabilité que l'appareil présente au moins l'une des deux pannes est

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}05 + 0{,}03 - 0{,}01$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}07}$.

b. La probabilité que l'appareil présente la panne « a » mais pas la panne « b » est $\mathbf{P}(A \cap \overline{B})$. Or, comme B et $\overline{B}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A)$ donc

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}05 - 0{,}01$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = 0{,}04}$.

c. La probabilité que l'appareil ne présente aucune panne est

$$\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - 0{,}07$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}93}$.

2. **a.** La variable aléatoire X prend les valeurs 200 (s'il n'y a aucun panne), $200 + 60 = 260$ (s'il y a seulement une panne « a »), $200 + 40 = 240$ (s'il y a seulement une panne « b ») et $200 + 60 + 40 = 300$ (s'il y a les deux pannes) donc $\boxed{X(\Omega) = \{200\,;260\,;240\,;300\}}$.

b. On déduit la loi de X des résultats de la question **1.** :

x_i	200	240	260	300
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,93	0,02	0,04	0,01

c. L'espérance de X est

$$\mathbf{E}(X) = 0{,}93 \times 200 + 0{,}02 \times 240 + 0{,}04 \times 260 + 0{,}01 \times 300$$

soit $\boxed{\mathbf{E}(X) = 204{,}2}$. Ainsi, le coût moyen d'un appareil est 204,20 euros.

d. Par la formule de König-Huygens, la variance est

$$\mathbf{V}(X) = 0{,}93 \times 200^2 + 0{,}02 \times 240^2 + 0{,}04 \times 260^2 + 0{,}01 \times 300^2 - 204{,}2^2$$

soit $\boxed{\mathbf{V}(X) = 258{,}36}$ et donc l'écart-type est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{X} \approx 16{,}07}$.
Cet écart-type est plutôt faible par rapport aux valeurs de X ce qui signifie que la plupart des valeurs sont plutôt proches de l'espérance. Autrement dit, dans la plupart des cas, le coût sera proche de 204,20 €, ce qui se voit bien sur le tableau.

Exercice 11. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si la variable X suit l'une des lois usuelles du cours, et si oui préciser laquelle.

1. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue 10 tirages successifs avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 et on note X le résultat obtenu.
3. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note X la somme des deux numéros obtenus.
4. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le nombre de 3 obtenus.
5. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le numéro obtenu au troisième lancer.

Solution.

1. Comme il y a remise, on a affaire à un schéma de Bernoulli donc X suit une loi binomiale de paramètre 10 et $\frac{3}{7}$: $\boxed{\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(10, \frac{3}{7})}$.
2. Par définition, X sur une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$: $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 5]\!])}$.
3. La variable X ne suit pas une loi usuelle.
4. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc X suit une loi binomiale de paramètre 8 et $\frac{1}{6}$ (car le dé est équilibré : $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(8, \frac{1}{6})}$.
5. Comme le dé est équilibré, X suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$: $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, 6]\!])}$.

Exercice 12. Une puce se déplace vers la droite le long d'un axe gradué durant n secondes ($n \in \mathbb{N}^*$). Elle se trouve initialement à l'abscisse 0. À chaque seconde, elle effectue soit un petit saut d'une unité (avec probabilité $\dfrac{1}{3}$) soit un grand saut de deux unités (avec probabilité $\dfrac{2}{3}$).

1. On note G le nombre de grands sauts qu'effectue la puce.
   a. Déterminer la loi de G.
   b. En déduire $\mathbf{E}(G)$ et $\mathbf{V}(G)$.
2. Soit X l'abscisse à laquelle se retrouve la puce après les n sauts.
   a. Exprimer X en fonction de G.
   b. En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Solution.

1. a. La succession de n sauts constitue un schéma de Bernoulli en prenant comme succès « La puce fait un grand saut ». Ainsi, G, qui compte le nombre de succès, suit une loi $\mathscr{B}(n, \frac{2}{3})$.
   b. On en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(G) = \dfrac{2n}{3}}$ et $\boxed{\mathbf{V}(X) = \dfrac{2n}{9}}$.
2. a. Par définition, G est le nombre de grands sauts donc $n - G$ est le nombre de petits et ainsi $X = 2G_n + (n - G)$ i.e. $\boxed{X = n + G}$.
   b. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(G) + n = \frac{2n}{3} + n$ i.e. $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{5n}{3}}$. Par propriété de la variance, on a également $\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(G) = \frac{2n}{9}}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une machine permet de jouer au jeu suivant. Le joueur paye une mise initiale de 3 euros, puis la machine effectue n tirages successifs avec remise dans une urne contenant 1 boule blanche et 9 boules noires. La machine donne ensuite au joueur une somme égale (en euros) au double du nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer en fonction de n s'il est intéressant de jouer à ce jeu.

Solution. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Comme il y a remise, on a affaire à un schéma de Bernoulli donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{10})$.

Notons G le gain algébrique du joueur. Par définition, $G = 2X - 3$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(G) = 2\mathbf{E}(X) - 3 = 2 \times n \times \dfrac{1}{10} - 3 = \dfrac{n}{5} - 3$. Ainsi, le jeu est favorable au joueur si et seulement si $\dfrac{n}{5} - 3 > 0$ i.e. $n > 15$.

$\boxed{\text{On conclut qu'on a intérêt à jouer à ce jeu si et seulement si } n \geqslant 16}$.

Exercice 14. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages successifs avec remise. On note X le numéro obtenu au premier tirage, Y le numéro obtenu au second tirage et $M = \max(X, Y)$ le plus grand des deux.

1. Déterminer les lois de X et de Y.

2. Déterminer les fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour M.

4. Soit $k \in [\![1, 4]\!]$.

 a. Justifier que les évènements $\{X \leqslant k\}$ et $\{Y \leqslant k\}$ sont indépendants.

 b. Exprimer l'évènement $\{M \leqslant k\}$ en fonction des évènements $\{X \leqslant k\}$ et $\{Y \leqslant k\}$.

 c. En déduire la valeur de $F_M(k)$.

5. Déterminer la loi de M.

Solution.

1. Par définition, comme il y a remise, X et Y suivent tous les deux des lois $\mathscr{U}([\![1, 4]\!])$.

2. Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$,

$$F_X(k) = \mathbf{P}(X \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{4} = \frac{k}{4}.$$

Comme X et Y suivent la même loi, elles ont également la même fonction de répartition donc, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, 4]\!],\ F_X(k) = F_Y(k) = \dfrac{k}{4}}$.

3. X et Y prennent des valeurs entre 1 et 4 donc $\boxed{M(\Omega) = [\![1, 4]\!]}$.

4. **a.** Comme il s'agit de tirage avec remise, $\boxed{\{X \leqslant k\} \text{ et } \{Y \leqslant 4\} \text{ sont indépendants}}$.

 b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Remarquons que $\{M \leqslant k\} = \{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\}$ (le maximum de X et Y est inférieur ou égal à k si et seulement si X et Y sont inférieures ou égales à k).

 c. Ainsi, par indépendance,

$$F_M(k) = \mathbf{P}(M \leqslant k) = \mathbf{P}(\{X \leqslant k\} \cap \{Y \leqslant k\}) = \mathbf{P}(X \leqslant k)\mathbf{P}(Y \leqslant k)$$

i.e. $F_M(k) = F_X(k)F_Y(k)$. Comme $F_X = F_Y$, on en déduit que $F_M(k) = F_X(k)^2$ i.e. $\boxed{F_M(k) = \dfrac{k^2}{16}}$.

5. Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $\{M = k\} = \{M \leqslant k\} \setminus \{M \leqslant k - 1\}$ donc, comme $\{M \leqslant k - 1\} \subset \{M \leqslant k\}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M = k) = \mathbf{P}(M \leqslant k) - \mathbf{P}(M \leqslant k - 1) = F_M(k) - F_M(k - 1) &= \frac{k^2}{16} - \frac{(k-1)^2}{16} \\ = \frac{k^2 - (k-1)^2}{16} = \frac{k^2 - (k^2 - 2k + 1)}{16}\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, 4]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{2k - 1}{16}}$.

Exercice 15. Soit un entier $n \geqslant 2$. Une urne contient initialement 1 boule blanche et $n-1$ boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à avoir sorti toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note N_k l'évènement réalisé lorsque la boule obtenue au k-ième tirage est noire.

1. Quel est l'univers image de X ?

2. Calculer $\mathbf{P}(X=1)$ et $\mathbf{P}(X=2)$.

3. Soit un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

a. Après $k-1$ tirages, combien reste-t-il de boules dans l'urne ?

b. En déduire $\mathbf{P}(N_k \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ et $\mathbf{P}(\overline{N_k} \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$.

c. Exprimer l'évènement $\{X = k\}$ en fonction des événements $N_1, N_2, \cdots, N_n$ et de leurs contraires.

d. En déduire la loi de X. On reconnaîtra une loi usuelle.

4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Solution.

1. La boule blanche peut être tirée à n'importe quel tirage donc $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

2. Par équiprobabilité des tirages, $\boxed{\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{n}}$.

De plus, $\{X=2\} = N_1 \cap \overline{N_2}$ donc $\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(\overline{N_2} \mid N_1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{n}}$.

3. **a.** Après $k-1$ tirages, il reste $n-k+1$ boules dans l'urne.

b. Par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(N_k \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{n-1-(k-1)}{n-k+1}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(N_k \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{n-k}{n-k+1}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(\overline{N_k} \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) = \frac{1}{n-k+1}}$.

c. L'évènement $\{X = k\}$ signifie qu'on tire la boule blanche au k-ème tirage i.e. qu'on a tiré $k-1$ boules noires puis une boule blanche.

Ainsi, $\boxed{\{X=k\} = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \overline{N_k}.}$

d. Par la formule de probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \overline{N_k}) \\
&= \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}(N_2 \mid N_1) \cdots \mathbf{P}(N_{k-1} \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-2})\mathbf{P}(\overline{N_k} \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])}$.

4. Par propriété, on en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}}$.

Exercice 16. On dispose de deux bassins numérotés 1 et 2. Un poisson se trouve initialement dans le bassin 1. Chaque heure, une trappe s'ouvre entre les deux bassins et le poisson change de bassin avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et reste dans le bassin où il se trouve avec une probabilité $\frac{3}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le numéro du bassin dans lequel se trouve la bassin après n heures. On a donc $X_0 = 1$.

1. Déterminer la loi de X_1, ainsi que son espérance.

2. a. Déterminer $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)$.

b. En déduire $\mathbf{P}(X_2 = 1)$.

c. Calculer l'espérance de X_2.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbf{P}(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbf{P}(X_n = 2)$. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - b_n$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $a_n + b_n$.

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n en fonction de n.

Solution.

1. Par définition, $X_1(\Omega) = \{1\,;2\}$ et, comme $\{X_0 = 1\}$ est une évènement certain, on déduit de l'énoncé que $\boxed{\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{3}{4} \text{ et } \mathbf{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}}$.

2. a. D'après l'énoncé, $\boxed{\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{3}{4} \text{ et } \mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2) = \frac{1}{4}}$.

b. Comme $\{X_1 = 1\}$ et $\{X_1 = 2\}$ forment un système complet d'évènements, d'après le formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 1) &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 2)\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)\\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{5}{8}}$.

c. Comme $X_2(\omega) = \{1\,;2\}$, on en déduit que $\mathbf{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{3}{8}$. Dès lors, $\mathbf{E}(X_2) = 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{3}{8}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(X_2) = \frac{11}{8}}$.

3. soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = \frac{3}{4}$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2) = \frac{1}{4}$. Comme $\{X_n = 1\}$ et $\{X_n = 2\}$ forment un système complet d'évènements (car $X_n(\Omega) = \{1\,;2\}$), d'après le formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)\\ &= a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times \frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc $\boxed{a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n}$.
Par le même raisonnement,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbf{P}(X_n = 1)\mathbf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2)\mathbf{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2)\\ &= a_n \times \frac{1}{4} + b_n \times \frac{3}{4}\end{aligned}$$

donc $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n - \left(\frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n\right) = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) = \frac{1}{2}u_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } u_0 = 1}$ (car $X_0 = 1$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$).

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ soit, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^n}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{X_n = 1\}$ et $\{X_n = 2\}$ forment un système complet d'évnements, $\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_n = 2) = 1$ i.e. $\boxed{a_n + b_n = 1}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $a_n - b_n = \frac{1}{2^n}$ et $a_n + b_n = 1$ donc $a_n = \frac{1}{2^n} + b_n$ et $\frac{1}{2^n} + b_n + b_n = 1$.
Ainsi, $b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$ et $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$.
On conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}.$$