⧫ Corrigés des exercices du chapitre 18

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2023} - x^{2024}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^5+x^3}$ **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ **8.** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ **9.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$ **12.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1-\mathrm{e}^x)$ **15.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-\mathrm{e}^x)$

Solution.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty}$.

2. On a affaire à la limite d'un polynôme en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2023} - x^{2024} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^{2024}$ i.e. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2023} - x^{2024} = -\infty}$.

3. On a affaire à la limite d'un quotient de polynômes en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = -1}$.

4. <u>Première méthode.</u> Pour tout réel x,

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x})} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par somme et quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1}$.

<u>Seconde méthode.</u> On peut remarquer que, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = f(\mathrm{e}^x)$ en notant $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{1+X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} 1 = 1$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1}$.

5. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x^2+x}{x^5}x^3 = \dfrac{x(x+1)}{x(x^4+x^2)} = \dfrac{x+1}{x^4+x^2}$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^4+x^2 = 0^+$ (car les puissances sont paires) donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^5+x^3} = +\infty}$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 0}$.

7. Pour tout réel $x > 0$,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$. Ainsi, par quotient, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0}$.

8. $\lim\limits_{x\to-1} x-1 = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{x+1} = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = -\infty}$.

9. Pour tout réel $x > 0$, on a l'encadrement $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ donc, en multipliant par $x > 0$, $-x \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$. Or, $\lim\limits_{x\to0^+} x = \lim\limits_{x\to0^+} -x = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

10. Pour tout réel x, $x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0}$.

11. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x}\ln(x) = x^{\frac{1}{2}}\ln(x)$ donc, par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x) = 0}$.

12. Pour tout réel $x > 0$, $\left(\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln(x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = 0}$.

13. Pour tout réel $x > 0$, $x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0}\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^0 = 1$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1}$.

14. $\lim\limits_{x\to0^-} 1-\mathrm{e}^x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1-\mathrm{e}^x) = -\infty}$.

15. $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln(X) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-\mathrm{e}^x) = 0}$.

Exercice 2. Étudier le comportement de chacune des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ **2.** $h : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ **3.** $k : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

Solution.

1. Première méthode. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(2+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ donc, par inverse, somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$.

Seconde méthode. On remarque que, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = f(\sqrt{x})$ où $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2X+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}}$.

2. On vient de voir que

3. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{2x+1}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}} = +\infty}$.

4. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}^2+1}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2X^2+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{2X^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{2X} = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1} = 0}$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. Étudier la comportement de f aux bornes de D_f.

Solution.

1. La fonction f est un quotient de polynômes donc elle est définie pour tout réel x tel que $x^2 - x - 2 \neq 0$. Or, le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 2$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}}$.

2. En tant que quotient de polynômes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0}$.

De la même façon, $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = 0}$

Comme le coefficient dominant de $X^2 - X - 2$ est positif, ce trinôme est positif sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ et négatif sur $]-1\,;2[$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to2^-} x^2 - x - 2 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to2^+} x^2 - x - 2 = 0^+$. Comme $\lim\limits_{x\to2} x + 1 = 3$, on en déduit, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty}$.

Enfin, comme les racines du trinôme $X^2 - X - 2$ sont -1 et 2 et son coefficient dominant est 1, on a, pour tout réel x, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$. Or, $\lim\limits_{x\to-1} x - 2 = -3$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\dfrac{1}{3}}$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

Solution.

1. La fonction f est un quotient de polynômes donc elle est définie pour tout réel x tel que $x^2+x-2 \neq 0$. Or, le discriminant de X^2+X-2 est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 1} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;1\}}$.

2. En tant que quotient de polynômes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x$ donc $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$.

De la même façon, $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = -\infty}$

Comme le coefficient dominant de X^2-X-2 est positif, ce trinôme est positif sur $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$ et négatif sur $]-2\,;1[$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2+x-2 = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2+x-2 = 0^+$. Comme $\lim\limits_{x \to 1} x^3-7x-6 = -12$, on en déduit, par quotient, que $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty}$.

Enfin, on remarque que -2 est racine de X^3-7x-6 donc il existe des réels a, b et c tels que $X^3-7x-6 = (X+2)(aX^2+bX+c)$. Or,

$$(X+2)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX+2aX^2+2bX+2c = aX^3+(2a+b)X^2(2b+c)X+2c$$

donc, par unicité des coefficients,

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 0 \\ 2b+c = -7 \\ 2x = -6 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Comme le coefficient dominant de X^3-7X-6 est 1, on en déduit que $X^3-7x-6 = (X+2)(X^2-2X-3)$. De plus, X^2+X-2 est un polynôme unitaire dont les deux racines sont -2 et 1 donc $X^2+X-2 = (X-1)(X+2)$. Ainsi, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$. Or, $\lim\limits_{x \to -2} x^2-2x-3 = 5$ et $\lim\limits_{x \to -2} x-1 = -3$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\dfrac{5}{3}}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2+\sin(x)}{x^2+1}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{x^2+1}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2+\sin(x) \leqslant 3$ et, comme $x^2+1>0$, on en déduit que $\boxed{\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{x^2+1}}$.

2. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2+1} = 0$.

On conclut alors, grâce au théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par

$$\forall x \in [0\,;3] \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x \in [1\,;2] \\ 2x-2 & \text{si } x \in]2\,;3] \end{cases}$$

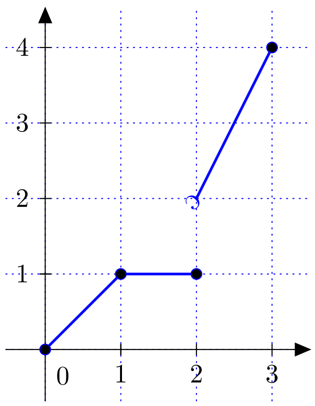
1. Tracer la représentation graphique de f.

2. La fonction f est-elle continue en 1 ?

3. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Solution.

1. La courbe de f est la suivante :



2. D'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x = 1$ et, d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1 = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 1}$.

3. D'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 1 = 1$ et, d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2x-2 = 2$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ donc f n'a pas de limite en 2 et donc $\boxed{f \text{ est discontinue en } 2}$.

Exercice 7. Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 1 \\ 2ax-b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x+2b & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. Comme f est affine sur chaque intervalle $]-\infty\,;1[$, $[1\,;3]$ et $]3\,;+\infty[$, elle est continue sur chacun de ces 3 intervalles. Dès lors, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en 1 et en 3. Or, d'une part, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = a+2$ et $f(1) = 2a-b$ donc f est continue en

1 si et seulement si $a+2=2a-b$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6+2b$ et $f(3)=6a-b$ donc f est continue en 3 si et seulement si $6+2b=6a-b$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a+2=2a-b \\ 6+2b=6a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a-b=2 \\ 2a-b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2+b \\ 2(2+b)-b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2+b \\ 4+b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a=0 \text{ et } b=-2}$.

Exercice 8. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1 et déterminer la valeur de ce prolongement en 1.

Solution. Le polynôme X^3-1 s'annule en 1 donc, comme il est unitaire, il existe des réels a, b et c tels que $X^3-1=(X-1)(aX^2+bX+c)$. Or,

$$(X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$$

donc, par unicité de coefficients,

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=0 \\ -c=-1 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}.$$

Ainsi, $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ donc, pour tout réel $x\neq 0$,

$$g(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 \xrightarrow[x\to 1]{} 3.$$

Ainsi, g admet une prolongement par continuité en 1 défini par

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \quad \tilde{g}(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 3 & \text{si } x=1 \end{cases}}.$$

Exercice 9. Soit f la fonction définie pour tout réel $x\in\,]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x>0 \quad f(x)=x^2\ln(x)+1.$$

1. Justifier que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.

Solution.

1. La fonction ln et la fonction carré sont continues sur $]0\,;+\infty[$ donc par produit et somme, f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

2. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$. Ainsi, f admet une prolongement par continuité en 0 défini par

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad \tilde{g}(x)=\begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}}.$$

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^{2023}+x+1}{x^{2024}+1}$. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

Solution. La fonction f est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie sur $\mathbb{R}$ (car, pour tout réel x, $x^{2024} \geqslant 0$ donc $x^{2024}+1_neq0$) donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(0)=1$ donc $0 \in [f(-1)\,;f(0)]$. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires que $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet au moins une solution dans } [-1\,;0]}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout réel x,

$$|f(x)| = 1.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(x)$?
2. En raisonnant par l ?absurde, montrer que f est constante.

Solution.

1. Par définition, $|f(x)|=1$ donc $\boxed{f(x)=1 \text{ ou } f(x)=-1}$.
2. Supposons que f ne soit pas constante sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a)=-1$ et $f(b)=1$. Comme f est continue et comme 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe c entre a et b tel que $f(c)=0$. C'est absurde car alors $|f(c)|=0 \neq 1$. Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. Démontrer que f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$.
4. Déterminer une expression de la bijection réciproque.

Solution.

1. On peut remarquer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2} = f(x)$ donc f est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0\,;+\infty[$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Ainsi, pour tout réel x,

   $$f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{-x} \iff x \geqslant -x \iff 2x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$

   Comme f' ne s'annule qu'en 0, on en déduit donc que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   De plus, d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par somme, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Grâce à la parité de f, on aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

2. Comme f est paire, par exemple, $f(-1) = f(1)$ donc f n'est injective.
3. Sur $[0\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Par le théorème de la bijection continue, $\boxed{\text{elle réalise donc une bijection de } [0\,;+\infty[\text{ sur } f([0\,;+\infty[) = [1\,;+\infty[}$.
4. Soit $y \in [1\,;+\infty[$. Alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = y \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2y \underset{\mathrm{e}^x \neq 0}{\iff} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x = 2y\mathrm{e}^x \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0$$

Considérons le polynôme $P = X^2 - 2yX + 1$. Le discriminant de P est $\Delta = (-2y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$. Comme $y \geqslant 1$, $\Delta \geqslant 0$ et P possède une ou deux racines réelles données par

$$r_1 = \frac{-(-2y) - \sqrt{4y^4 - 4}}{2 \times 1} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

et

$$r_2 = \frac{-(-2y) + \sqrt{4y^4 - 4}}{2 \times 1} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Comme $y \geqslant 1$, $r_2 \geqslant 1$. De plus,

$$r_1 = \frac{(y - \sqrt{y^2 - 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})}{y + \sqrt{y + \sqrt{y^2 + 1}}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{r_2} = \frac{1}{r_2} \in \,]0\,;1]$$

car $r_2 \geqslant 1$.

Ainsi,

$$f(x) = y \iff \mathrm{e}^x = r_1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = r_2 \iff x = \ln(r_1) \text{ ou } x = \ln(r_2).$$

Si $y = 1$, $r_1 = r_2 = 1$ et $x = \ln(1) = 0$. Sinon, $r_2 > 1$ donc $r_1 < 1$ et ainsi $\ln(r_1) < 0$ donc, comme $x \geqslant 0$, $x = \ln(r_2)$. Dans tous les cas, $x = \ln(r_2) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ donc la bijection réciproque de $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow [1\,;+\infty[$ est

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g : & [1\,;+\infty[& \longrightarrow & [0\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{array}}$$

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

1. $(E_1) : x^3 = 7$ **2.** $(E_2) : x^4 = 8$ **3.** $(E_3) : x^6 + x = 0$.

Solution.

1. Comme la fonction racine cubique est bijective sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E_1) \text{ est } \sqrt[3]{7}}$.
2. Comme 4 est pair, pour tout réel x, $x^4 = |x|^4$ donc, comme la fonction racine quatrième est bijective sur $[0\,;+\infty[$,

$$(E_2) \iff |x| = \sqrt[4]{8} \iff x = \sqrt[4]{8} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{8}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{-\sqrt[4]{8}\,; \sqrt[4]{8}\}}$.

3. Pour tout réel x,

$$(E_3) \iff x(x^5+1)=0 \iff x=0 \text{ ou } x^5+1=0 \iff x=0 \text{ ou } x^5=-1.$$

Comme la fonction racine cinquième est bijective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$(E_3) \iff x=0 \text{ ou } x=\sqrt[5]{-1}=-1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_3) \text{ est } \{0\,;-1\}}$.

Exercice 14. En reconnaissant des taux d'accroissement, calculer, dans chacun des cas suivant, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

1. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ **2.** $f(x)=\dfrac{\cos(x)-1}{x}$ **3.** $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ **4.** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Solution.

1. Pour tout réel $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}$ est le taux de variation de la fonction exp entre 0 et x donc, comme exp est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\exp'(0)=\exp(0)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1}$.

2. Pour tout réel $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$ est le taux de variation de la fonction cos entre 0 et x donc, comme cos est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\cos'(0)=-\sin(0)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0}$.

3. Pour tout réel $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$ est le taux de variation de la fonction sin entre 0 et x donc, comme sin est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\sin'(0)=\cos(0)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1}$.

4. Pour tout réel $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0}$ est le taux de variation de la fonction $g: t\longmapsto \ln(1+t)$ entre 0 et x donc, comme g est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=g'(0)=\dfrac{1}{1+0}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1}$.

Exercice 15. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer sur quel ensemble f est dérivable et calculer sa dérivée.

1. $f: x\longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f: x\longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ **3.** $f: x\longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $f: x\longmapsto x\sqrt[3]{x}$ **5.** $f: x\longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **6.** $f: x\longmapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Solution.

1. f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition i.e. sur $\mathbb{R}^*$ et, $\boxed{\text{pour tout réel } x\neq 0,\ f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}}$.

2. f est la composée de la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction exp dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\boxed{\text{pour tout réel } x>0,\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$.

3. f est la composée de la fonction inverse dérivable sur $\mathbb{R}^*$ suivie de la fonction cos dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times \left(-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ i.e. $\boxed{\text{pour tout réel } x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

4. La fonction f est le produit de la fonction identité dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine cubique dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x} + x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2}} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{x}$$

i.e. pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

De plus, pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0 = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{0}$.

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, $\boxed{\text{pour tout réel } x \geqslant 0,\ f'(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}}$.

5. La fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, $x \longmapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc, comme sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \times \sqrt{1+x^2} - \sin(x)\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} \\ &= \frac{\cos(x) \times \sqrt{1+x^2} - \sin(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\cos(x) \times \sqrt{1+x^2}^2 - \sin(x) \times x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

soir finalement, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f'(x) = \dfrac{(1+x^2)\cos(x) - x\sin(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}$.

6. La fonction f est définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. Comme la fonction identité et la fonction ln sont dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par produit, la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. De plus, la fonction exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \frac{-\ln(x) + 1}{x^2}x^{\frac{1}{x}} = (1 - \ln(x))x^{\frac{1}{x}-2}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ f(x) = (1 - \ln(x))x^{\frac{1-2x}{x}}}$.

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 0$.

2. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

3. Déduire de la question précédente que, pour tout réel $x < 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Solution.

1. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = 0}$.

2. Comme la dérivée de f est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$.

3. Soit un réel $x < 0$. Alors, $-x > 0$ donc, grâce à la question précédente, $\arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(-x)$. Or, par imparité de la fonction arctan, $\arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\arctan(-x) = -\arctan(x)$. Ainsi, $-\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - (-\arctan(x)) = \frac{\pi}{2} + \arctan(x)$. En multipliant par -1, on obtient $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x < 0,\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}$.

Exercice 17. Soit $f : x \longmapsto xe^x$ définie sur $[-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.
On note w la bijection réciproque de f.

2. Déterminer $w(0)$.

3. Justifier que w est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, que $w'(0) = 1$ et que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\setminus \{0\}, \quad w'(x) = \frac{w(x)}{x(w(x)+1)}.$$

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant -1$,

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Ainsi, comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, pour tout réel $x \geqslant -1$, $f'(x) \geqslant 0$ et, de plus, f' ne s'annule qu'en -1. On en déduit donc que f est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

De plus, $f(-1) = -1 \times \mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{e}$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Comme f est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$, elle est continue sur ce même intervalle. Ainsi, f est continue et strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$ donc, par le théorème de la bijection continue, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [-1\,;+\infty[\text{ sur } \left[-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[}$.

2. Comme $f(0) = 0\mathrm{e}^0 = 0$, $w(0) = 0$.

3. Pour tout $x > -1$, $f'(x) \neq 0$ donc, comme $w(x) > -1$ pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, par propriété, w est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$ et, pour tout réel $x > -\dfrac{1}{e}$,

$$w'(x) = \frac{1}{f'(w(x))} = \frac{1}{(w(x)+1)\mathrm{e}^{w(x)}}.$$

En particulier, $w'(0) = \dfrac{1}{(w(0)+1)\mathrm{e}^{w(0)}} = \dfrac{1}{(0+1)\mathrm{e}^0}$ soit $\boxed{w'(0) = 0}$.

De plus, comme w est la bijection réciproque de f, pour tout réel $x \geqslant -1$, $f(w(x)) = x$ i.e. $w(x)\mathrm{e}^{w(x)} = x$ donc, pour $x \neq 0$, $\mathrm{e}^{w(x)} = \dfrac{x}{w(x)}$. On en déduit que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[\setminus \{0\}$, $w'(x) = \dfrac{1}{(w(x)+1) \times \frac{x}{w(x)}} = \dfrac{1}{(w(x)+1) \times x} w(x)$ c'est-à-dire,

$\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[\setminus \{0\},\ w'(x) = \dfrac{w(x)}{x(w(x)+1)}}$

Exercice 18. En utilisant le théorème des accroissements finis, donner une valeur approchée de $\sqrt{10\,001}$ en majorant l'erreur commise.

Solution. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des accroissement finis, il existe un réel $c \in]10\,000\,;10\,001[$ tel que

$$\frac{\sqrt{10\,001} - \sqrt{10\,000}}{10\,001 - 10\,000} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \qquad \text{i.e.} \qquad \sqrt{10\,001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Ainsi, on en déduit que $\sqrt{10\,001} = 100 + \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$. Or, $10\,000 < c < 10\,001$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $100 < \sqrt{c} < \sqrt{10\,001}$ donc $200 < 2\sqrt{c}$ et, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{200}$. Ainsi,

$$\sqrt{10\,001} < 100 + \frac{1}{200} = 100{,}005$$

Dès lors, $\sqrt{c} < 100{,}005$ donc, comme précédemment, $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} > \dfrac{1}{200{,}01}$ Ainsi,

$$100 + \frac{1}{200{,}01} < \sqrt{10\,001} < 100 + \frac{1}{200}$$

donc $\sqrt{10\,001} \approx 100{,}005$ avec une erreur inférieure à

$$\frac{1}{200} - \frac{1}{200{,}05} = \frac{200{,}05 - 200}{200 \times 200{,}05} = \frac{0{,}05}{200 \times 200{,}05} < \frac{5 \cdot 10^{-2}}{200^2} = \frac{5}{4} \times 10^{-6}.$$

Ainsi, $\boxed{\sqrt{10\,001} \approx 100{,}005 \text{ à } 1{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ près.}}$

En effet, on peut vérifier que $\sqrt{10\,001} \approx 100.004999875$.

Exercice 19.

1. Soit un réel $a > 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{a+1} \leqslant \ln(a+1) - \ln(a) \leqslant \frac{1}{a}.$$

2. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3. Déduire des questions précédentes la limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution.

1. La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc, par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in\,]a\,;a+1[$ tel que

$$\frac{\ln(a+1) - \ln(a)}{a+1-a} = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Comme $0 < a < c < a+1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ donc $\boxed{\frac{1}{a+1} \leqslant \ln(a+1) - \ln(a) \leqslant \frac{1}{a}}$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ donc $\boxed{\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$. Or, d'après les deux questions précédentes, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$ donc, en multipliant par $x > 0$, $\frac{x}{x+1} \leqslant x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$. Par ailleurs, comme exp est continue en 1, $\lim\limits_{X \to 1} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^1 = e$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$.

Exercice 20. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \cos\left(\frac{u_n}{2}\right) \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x$.

a. Démontrer que g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

d. Déterminer le signe de g sur $[0\,;+\infty[$ et justifier que $\alpha \in [0\,;\pi]$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\alpha]$ par $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a. Calculer $f(0)$ et justifier que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Montrer que f est croissante sur $[0\,;\alpha]$.

c. Déduire des questions précédentes que $\alpha \geqslant 1$.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

e. Démontrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Solution.

1. a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\frac{1}{2}\left(-\sin(\frac{x}{2})\right) - 1 = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}) - 1$. Or, pour tout réel x, $\sin(\frac{x}{2}) \leqslant 1$ donc $\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}) \leqslant \frac{1}{2}$ et ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ donc $g'(x) < 0$. Il s'ensuit que $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;+\infty[}$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$, $\cos(\frac{x}{2}) \geqslant -1$ donc $-\cos(\frac{x}{2}) \leqslant 1$ et ainsi $g(x) \leqslant 2 + 1 - x = 3 - x$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - x = -\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$.

c. La fonction g est continue car dérivable et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, $g(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;1]$. Comme $0 \in\,]-\infty\,;1]$, on en déduit qu'$\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \in [0\,;+\infty[\text{ tel que } g(\alpha) = 0}$.

d. Comme g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et s'annule en α, on peut conclure que $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in [0\,;\alpha] \text{ et } g(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in [\alpha\,;+\infty[}$.

De plus, $g(\pi) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi = 2 - \pi < 0$ donc $\pi \geqslant \alpha$. Ainsi, $\boxed{\alpha \in [0\,;\pi]}$.

2. a. D'une part, $f(0) = 2 - \cos(0)$ i.e. $\boxed{f(0) = 1}$. D'autre part, par définition, $g(\alpha) = 0$ i.e. $2 - \cos(\frac{\alpha}{2}) - \alpha = 0$ donc $2 - \cos(\frac{\alpha}{2}) = \alpha$ et ainsi $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$.

b. En raisonnant comme en question **1.a**, f est dérivable sur $[0\,;\alpha]$ et, pour tout $x \in [0\,;\alpha]$, $f'(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$. De plus, on a vu que $\alpha \leqslant \pi$ et, ainsi, si $x \in [0\,;\alpha]$ alors $\frac{x}{2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ car la fonction sin est positive sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On conclut que $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0\,;\alpha]}$.

c. Comme $\alpha \geqslant 0$ et comme f est croissante sur $[0\,;\alpha]$, $f(\alpha) \geqslant f(0)$ i.e. d'après le résultat de la question **a.**, $\boxed{\alpha \geqslant 1}$.

d. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ».

Initialisation. Étant donné que $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = 1$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ (car $\alpha \geqslant 1$).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ et, comme f est croissante sur $[0\,;\alpha]$, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ i.e. $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ d'après la question **a.**. À plus forte raison, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha}.$$

e. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par α donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \leqslant \alpha}$.

Alors, d'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, comme f est continue en ℓ (car $\ell \in [0\,;\alpha]$), $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n = f(\ell)$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = f(\ell)$ i.e. $\ell = 2 - \cos(\frac{\ell}{2})$ donc $g(\ell) = 0$. Comme $\ell \in [0\,;+\infty[$, on déduit alors de la question **1.c.** que $\ell = \alpha$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.

Exercice 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n)\ x^3 + nx = 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction

$$f_n : x \longmapsto x^3 + nx - 1$$

définie sur $\mathbb{R}$.

a. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}$. On y fera apparaître ses limites ainsi que ses valeurs en 0 et en 1.

b. Démontrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à $[0\,;1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'unique solution de l'équation (E_n). On définit ainsi une suite réelle u. D'après la question précédente, $u_n \in [0\,;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $f_n(u_{n+1})$.

c. En utilisant la question précédente et le tableau de variations de f_n, démontrer que u est décroissante.

3. **a.** Justifier que u converge.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. En déduire la limite de u.

4. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Solution.

1. **a.** La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + n$. Si $n > 0$ alors, pour tout réel x, $f'(x) > 0$ car $3x^2 \geqslant 0$ et, si $n = 0$ alors, pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en 0. Ainsi, dans tous les cas, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Enfin, $f(0) = 0^3 + n \times 0 - 1 = -1$ et $f(1) = 1^3 + n \times 1 - 1 = n$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ $\nearrow$	-1 $\nearrow$	n $\nearrow$	$+\infty$

b. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. Or, pour tout réel x, $f(x) = 0$ équivaut à $x^3 + nx = 1$ donc $\boxed{(E_n) \text{ possède une unique solution dans } \mathbb{R}}$.

Comme, de plus, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = n \geqslant 0$, cette solution appartient à $[0\,;1]$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^3 + nu_{n+1} - 1$. Or, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1}^3 + (n+1)u_{n+1} - 1 = 0$ donc $u_{n+1}^3 = 1 - (n+1)u_{n+1}$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = 1 - (n+1)u_{n+1} + nu_{n+1} - 1$ i.e. $\boxed{f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme $u_{n+1} \in [0\,;1]$, $u_{n+1} \geqslant 0$ donc $-u_{n+1} \leqslant 0$ i.e. $\boxed{f_n(u_{n+1}) \leqslant 0}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $f_n(u_n) = 0$ donc on déduit de la question précédente que $f_n(u_{n+1}) \leqslant f_n(u_n)$. Dès lors, par croissance de f_n sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ainsi, $\boxed{u \text{ est décroissante}}$.

3. a. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{u \text{ converge}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^3 + n \times \dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n^3} + 1 - 1 = \dfrac{1}{n^3} \geqslant 0$ donc $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \geqslant f_n(u_n)$ donc, par croissance de f_n sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\dfrac{1}{n} \geqslant u_n}$.

c. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^3 + nu_n - 1 = 0$ donc $nu_n = 1 - u_n^3$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^3 = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$ donc, par définition, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$.

Exercice 22. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [0\,;1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.

3. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers un réel ℓ.

4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,;1]$ et, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$ car $n > 0$ et $x \geqslant 0$. Ainsi, f_n est continue car dérivable et strictement décroissante sur $[0\,;1]$. De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ donc, par le théorème de la bijection continue, f_n réqlise une bijection de $[0\,;1]$ sur $[-1\,;1]$. Comme $0 \in [-1\,;1]$, on en déduit qu'$\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha_n \in [0\,;1] \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0}$.

Remarque : en fait, on a même $\alpha_n \in]0\,;1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$ i.e. $1 - \alpha_n - \alpha_n^n = 0$ soit encore $1 - \alpha_n = \alpha_n^n$. Dès lors,

$$f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = \alpha_n^n - \alpha_n^{n+1} = \alpha_n^n(1 - \alpha_n).$$

Mais, comme $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n^n > 0$ et $1 - \alpha_n > 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) > 0}$.

3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ donc, comme la fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0\,;1]$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ ce qui prouve que $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$. De plus, elle est majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, on conclut que $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } \ell}$.

4. Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 1, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Supposons que $\ell \neq 1$. Alors, $0 \leqslant \ell < 1$. Comme (α_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \ell$ donc, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant \alpha_n^n \leqslant \ell^n$. Mais, comme $0 \leqslant \ell < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. On déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$. Par somme, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n + \alpha_n^n = \ell$. Mais, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n + \alpha_n^n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n + \alpha_n^n = 1$. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell = 1$, ce qui est absurde car on a supposé $\ell \neq 1$.
   Finalement, on conclut que $\boxed{\ell = 1}$.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$f'(x) = 2x(x-1)(x+1)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$
2. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède exactement deux solutions que l'on notera u_n et v_n (avec $u_n < v_n$).

   On définit ainsi deux suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$.
6. Déterminer les variations de (u_n) et (v_n).
7. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes puis déterminer leurs limites.

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 - \left(2x\mathrm{e}^{1-x^2} + x^2 \times (-2x)\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = -2x(1-x^2)\mathrm{e}^{1-x^2} \\ &= -2x(1-x)(1+x)\mathrm{e}^{1-x^2} \end{aligned}$$
   i.e. $\boxed{f'(x) = 2x(x-1)(x+1)\mathrm{e}^{1-x^2}}$.
2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $2x(x+1)\mathrm{e}^{1-x^2} \geqslant 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x-1$. On en déduit que $\underline{f \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;1] \text{ et strictement croissante sur } [1\,;+\infty[}$.
3. Pour réel $x \geqslant 0$,
$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^1\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 e \times \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = 1 - e \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}.$$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty$. Par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0$. Par produit et somme, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 1}$.

4. On aboutit au tableau suivant :

x	0	u_n	1	v_n	$+\infty$
Variation de f	1	$\frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{n}$	1

5. Comme f est continue sur $[0\,;+\infty[$ et strictement monotone sur chacun des deux $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur $[0\,;1]$ et une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[0\,;1[$.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. comme $n \geqslant 2$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [f(1)\,;f(0)]$. Dès lors, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution u_n dans $[0\,;1]$.

Par le même raisonnement, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution v_n dans $[1\,;+\infty[$.

On conclut que l'équation $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{n} \text{ possède exactement deux solutions } u_n \text{ et } v_n \text{ dans } [0\,;+\infty[}$.

6. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ donc, comme $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$, $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$. Or, u_n et u_{n+1} appartiennent par définition à $[0\,;1]$ et f est décroissante sur $[0\,;1]$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

De même, $f(v_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(v_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ donc, comme $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$, $f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$. Or, v_n et v_{n+1} appartiennent par définition à $[1\,;+\infty[$ et f est croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc $v_{n+1} \geqslant v_n$. Ainsi, la suite $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.

7. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \in [0\,;1]$ par définition donc (u_n) est croissante et majorée par 1 donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\,;1]$. Comme f est une fonction continue sur $[0\,;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or, par définition, $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$. Ainsi, $f(\ell) = 0$ et donc, d'après le tableau de variation de f, $\ell = 1$.

De même, (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente et, le même raisonnement montre que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$.

Exercice 24. Déterminer, en justifiant sa réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(A1) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(A2) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(A3) Une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

(A4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x+1}{2x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

(A5) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution alors f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

(A6) Il existe un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admette au moins 2 solutions dans $[0\,;+\infty[$.

Solution.

L'affirmation (A1) est fausse. La fonction $x \longmapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction affine) mais elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -1 < 0$.

L'affirmation (A2) est fausse. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

L'affirmation (A3) est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (car, pour tout réel x, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$) mais $\lim f(x) = 0$ car $\lim\limits_{+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

L'affirmation (A4) est fausse. En effet, $x \longmapsto \dfrac{x^3 + x + 1}{2x^2 - 1}$ est une fonction rationnelle définie en 1 donc elle est continue en 1 et ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x + 1}{2x^2 - 1} = \dfrac{1^3 + 1 + 1}{2 \times 1^2 - 1} = 3$.

L'affirmation (A5) est fausse. En effet, si on considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 + 1$. Alors f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$. Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;0\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$, strictement décroissante sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$. En particulier, f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - (\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{23}{27} > 0$ donc f est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ En particulier, f ne s'annule pas sur cet intervalle. Par ailleurs, sur $]-\infty\,;0]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $f(0) = 1$ donc, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $]-\infty\,;0]$ sur $]-\infty\,;1]$. En particulier, f s'annule une fois et une seule sur $]-\infty\,;0]$. Ainsi, f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ mais pour autant f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation (A6) est fausse. En effet, si n est un entier supérieur ou égal à 2 alors $f_n : x \longmapsto x^n + x - 2$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Dès lors, f_n s'annule au plus une fois sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 25.

1. Démontrer que si $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ est une fonction continue alors il existe un réel $c \in [0\,;1]$ tel que $f(x) = x$. On pourra considérer la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$.
2. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante alors il existe un réel c tel que $f(x) = x$.

Solution.

1. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ une fonction continue. Notons φ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. Alors, φ est continue sur $[0\,;1]$ comme somme de fonctions continues. De plus, $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car, pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Ainsi, $0 \in [f(0)\,;f(1)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(c) = 0$. Or, comme $\varphi(c) = 0$ alors $f(c) - c = 0$ i.e. $f(c) = c$. Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \in [0\,;1] \text{ tel que } f(c) = c}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Notons, de même, φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$ qui est continue comme précédemment.

Si, pour tout réel x, $\varphi(x) > 0$ alors $f(x) > x$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Or, f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc, sur $[0\,;+\infty[$, f est majorée par $f(0)$ et ainsi f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. On a aboutit à une absurdité donc il existe un réel a tel que $\varphi(a) \leqslant 0$.

Par ailleurs, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, $f(x) \geqslant f(0)$ donc $\varphi(x) \geqslant f(0) - x$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(0) - x = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{-\infty} \varphi = +\infty$.

Ainsi, $0 \in \left[\varphi(a)\,;\lim\limits_{-\infty}\varphi\right[$ donc, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in]\infty\,;a]$ tel que $\varphi(c) = 0$. On conclut qu'$\boxed{\text{il existe donc un réel } c \text{ tel que } f(c) = c}$.