⧫ Corrigés des exercices du chapitre 17

Exercice 1. Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+5y=0\}$ et $E=\mathbb{R}^2$.

2. $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-7z=0\}$ et $E=\mathbb{R}^3$.

3. $F_3 = \{(2a+b, a-3b, 5b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $E=\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Par définition, $F_1 \subset \mathbb{R}^2$ et $3\times 0+5\times 0=0$ donc $(0,0)\in F_1$. Soit $u=(u_1,u_2)$ et $v=(v_1,v_2)$ deux éléments de F_1 et λ un réel. Alors, par définition, $3u_1+5u_2=0$ et $3v_1+5v_2=0$. Or, $\lambda u+v=(\lambda u_1+v_1, \lambda u_2+v_2)$ et

$$3(\lambda u_1+v_1)+5(\lambda u_2+v_2)=3\lambda u_1+3v_1+5\lambda u_2+5v_2=\lambda(3u_1+5u_2)+3v_1+5v_2=0$$

donc $\lambda u+v\in F_1$. Ainsi, $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

2. Par définition, $F_2\subset\mathbb{R}^3$ et $2\times 0-7\times 0=0$ donc $(0,0,0)\in F_2$. Soit $u=(u_1,u_2,u_3)$ et $v=(v_1,v_2,v_3)$ deux éléments de F_2 et λ un réel. Alors, par définition, $2u_1-7u_3=0$ et $2v_1-7v_3=0$. Or, $\lambda u+v=(\lambda u_1+v_1,\lambda u_2+v_2,\lambda u_3+v_3)$ et

$$2(\lambda u_1+v_1)-7(\lambda u_3+v_3)=2\lambda u_1+2v_1-7\lambda u_3-7v_3=\lambda(2u_1-7u_3)+2v_1-7v_3=0$$

donc $\lambda u+v\in F_2$. Ainsi, $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

3. Par définition, $F_3\subset\mathbb{R}^3$ et $(0,0,0)=(2\times 0+0, 0-3\times 0, 5\times 0)$ donc $(0,0,0)\in F_3$. Soit u et v deux éléments de F_3 et λ un réel. Alors, par définition, il existe des réels a_1, b_1, a_2, et b_2 tels que $u=(2a_1+b_1, a_1-3b_1, 5b_1)$ et $u_2=(2a_2+b_2, a_2-3b_2, 5b_2)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\lambda u+v &= (\lambda(2a_1+b_1)+2a_2+b_2, \lambda(a_1-3b_1)+a_2-3b_2, \lambda 5b_1+5b_2)\\ &= (2\lambda a_1+\lambda b_1+2a_2+b_2, \lambda a_1-3\lambda b_1+a_2-3b_2, 5\lambda b_1+5b_2)\\ &= (2(\lambda a_1+a_2)+(\lambda b_1+b_2), \lambda a_1+a_2-3(\lambda b_1+b_2), 5(\lambda b_1+b_2))\end{aligned}$$

Ainsi, il existe deux réels $A=\lambda a_1+a_2$ et $B=\lambda b_1+b_2$ tels que $\lambda u+v=(2A+B, A-3B, 5B)$ donc $\lambda u+v\in F_3$. On conclut que $\boxed{F_3 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.
Autre méthode. On remarque que

$$F_3=\{a(2,1,0)+b(1,-3,5)\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((2,1,0),(1,-3,5))$$

donc $\boxed{F_3 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 2. Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $F_1=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y=0\}$.

2. $F_2=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+3z=0\}$

3. $F_3=\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y=0 \text{ et } x+y+3z=0\}$.

Solution.

1. Par définition, $F_1\subset\mathbb{R}^3$. De plus $0_{\mathbb{R}^3}=(0\,;0\,;0)\in F_1$ car $0+2\times 0=0$. Enfin, si $v_1=(x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2=(x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F_1 et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda v_1+v_2=(\lambda x_1+x_2\,;\lambda y_1+y_2\,;\lambda z_1+z_2)$ et

$$(\lambda x_1+x_2)+2(\lambda y_1+y_2)=\lambda(x_1+2y_1)+x_2+2y_2=0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F_1 donc $x_1+2y_1=x_2+2y_2=0$. Ainsi, $\lambda v_1+v_2\in F_1$.
On conclut que $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Par définition, $F_2 \subset \mathbb{R}^3$. De plus $0_{\mathbb{R}^3} = (0\,;0\,;0) \in F_2$ car $0+0+3\times 0 = 0$. Enfin, si $v_1 = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2 = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2\,;\lambda y_1 + y_2\,;\lambda z_1 + z_2)$ et

$$(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + 3z_1) + (x_2 + y_2 + 3z_2) = 0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F_2 donc $x_1+y_1+3z_1 = x_2+y_2+3z_2 = 0$. Ainsi, $\lambda v_1 + v_2 \in F_2$.
On conclut que $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

3. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et $F_3 = F_1 \cap F_2$, par conséquent, $\boxed{F_3 \text{ est également un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$.

2. $B = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

3. $C = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

4. $D = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Solution.

1. $v = (-1\,;0) \in A$ car $-1 \leqslant 0$ mais $-v = (1\,;0) \notin A$ car $1 > 0$. Ainsi, A n'est pas stable par le produit par un scalaire donc $\boxed{A \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

2. $v_1 = (0\,;1)$ et $v_2 = (1\,;0)$ appartiennent à B car $0\times 1 = 1\times 0 = 0$ mais $v_1+v_2 = (1\,;1) \notin B$ car $1\times 1 = 1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble B n'est pas stable par addition donc on conclut que $\boxed{B \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

3. Par définition $C \subset \mathbb{R}^2$ et $0_{\mathbb{R}^2} \in C$ car $0 = 0$. Soit $v_1 = (x_1\,;y_1)$ et $v_2 = (x_2\,;y_2)$ deux éléments de C et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2\,;\lambda y_1 + y_2)$ et, comme $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$, $\lambda x_1 + y_1 = \lambda x_2 + y_2$ donc $\lambda v_1 + v_2 \in C$.
Ainsi, $\boxed{C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

4. $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin D$ car $0+0 \neq 1$ donc $\boxed{D \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

Exercice 4. On considère les ensembles

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a-b\,;a+b\,;a-3b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $F \cap G$.

Solution.

1. Par définition, $F \subset \mathbb{R}^3$. De plus $0_{\mathbb{R}^3} = (0\,;0\,;0) \in F$ car $0+0-0 = 0$. Enfin, si $v_1 = (x_1\,;y_1\,;z_1)$ et $v_2 = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ sont deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2\,;\lambda y_1 + y_2\,;\lambda z_1 + z_2)$ et

$$(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + y_1 - z_1) + x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F donc $x_1 + y_1 - z_1 = x_2 + y_2 - z_2 = 0$. Ainsi, $\lambda v_1 + v_2 \in F$ et on conclut que F est un sous-espace vectoriel de E.
Pour G, on peut remarquer que

$$G = \{a\,(1\,;1\,;1) + b\,(-1\,;1\,;-3) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$$

donc, en posant $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (-1\,;1\,;-3)$, $G = \mathrm{Vect}(u,v)$ ce qui permet de conclure que $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Un élément $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $F \cap G$ si et seulement si $x + y - z = 0$ et il existe deux réels a et b tels que $x = a - b$, $y = a + b$ et $z = a - 3b$. Or,

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases} \iff \begin{cases} (a-b)+(a+b)-(a-3b)=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases} \iff \begin{cases} a+3b=0 \\ x=a-b \\ y=a+b \\ z=a-3b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=-3b \\ x=-4b \\ y=-2b \\ z=-6b \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{F \cap G \text{ est le sous-espace engendré par le vecteur } w = (-4\,;-2\,;-6)}$ (qui est aussi le sous-espace engendré par $-\frac{1}{2}w = (2\,;1\,;3)$).

Exercice 5. On considère les vecteurs $u = (-4\,;4\,;3)$, $v = (-3\,;2\,;1)$, $s = (-1\,;2\,;2)$ et $t = (-1\,;6\,;7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)$.

Solution. On peut remarquer que $s = u - v$ et $t = 4u - 5v$ donc s et t appartiennent à $\mathrm{Vect}(u, v)$ et donc $\mathrm{Vect}(s, t) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$.

Réciproquement, on remarque que $u = 5s - t$ et $v = 4s - t$ donc $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(s, t)$.

Par le principe de double inclusion, on conclut que $\boxed{\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)}$.

Exercice 6. On considère les vecteurs $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (1\,;0\,;-1)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{(2a\,;a+b\,;2b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Solution. Posons $F = \{(2a\,;a+b\,;2b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$. On remarque que

$$F = \{a\,(2\,;1\,;0) + b\,(0\,;1\,;2) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(s, t)$$

en posant $s = (2\,;1\,;0)$ et $t = (0\,;1\,;2)$.

Or, $u = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$ et $v = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$ donc, en raisonnant comme dans l'exercice précédent, $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(s, t)$ et, inversement, $s = u + v$ et $t = u - v$ donc, de même, $\mathrm{Vect}(s, t) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$. On conclut donc que $\boxed{\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)}$ par le principe de double inclusion.

Exercice 7. Déterminer lesquelles des familles suivantes sont libres. Pour chaque famille liée, exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres.

1. $((1, 2), (-1, 3))$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. $((0, 3), (1, 4), (1, 5))$ dans $\mathbb{R}^3$.

3. $((1, 2, 3), (1, 4, 5), (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. $((1, 2, 3), (-1, 1, 2), (3, 3, 4))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Comme $(1, 2)$ et $(-1, 3)$ sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment $\boxed{\text{une famille libre}}$.

2. On peut remarquer que $3(1, 5) - 3(1, 4) = (0, 3)$ donc $\boxed{\text{la famille est liée}}$.

3. Soit a, b et c des réels tels que $a(1,2,3)+b(1,4,5)+c(0,1,2)=0$. Alors,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+4b+c=0 \\ 3a+5b+2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ 2a+4(-a)+c=0 \\ 3a+5(-a)+2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ c=2a \\ c=a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=-a \\ c=2a \\ 2a=a \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$

donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$.

4. On peut remarquer que $2(1,2,3)-(3,3,4)=(-1,1,2)$ donc $\boxed{\text{la famille est liée}}$.

Exercice 8. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathcal{F}_1=(v_1,v_2)$ avec $v_1=(1\,;0\,;1)$ et $v_2=(1\,;2\,;2)$.
2. $\mathcal{F}_2=(v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1=(1\,;0\,;0)$, $v_2=(1\,;1\,;0)$ et $v_3=(1\,;1\,;1)$.
3. $\mathcal{F}_3=(v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1=(1\,;2\,;1)$, $v_2=(2\,;1\,;-1)$ et $v_3=(1\,;-1\,;-2)$.
4. $\mathcal{F}_4=(v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1=(1\,;-1\,;1)$, $v_2=(2\,;-1\,;3)$ et $v_3=(-1\,;1\,;-1)$.

Solution.

1. Soit a et b deux réels tels que $av_1+bv_2=0$. Alors, $a+b=0$, $2b=0$ et $a+2b=0$ donc $b=0$ et $a=0$. On conclut donc que la famille $\boxed{(v_1,v_2)\text{ est libre}}$.
2. Soit a, b et c des réels tels que $av_1+bv_2+cv_3=0$. Alors, $a+b+c=0$, $b+c=0$ et $c=0$ donc $c=0$, $b=0$ et $a=0$. On conclut que la famille $\boxed{(v_1,v_2,v_3)\text{ est libre}}$.
3. On remarque de $v_2=v_1+v_3$ donc la famille $\boxed{(v_1,v_2,v_3)\text{ est liée}}$.
4. On remarque que $v_3=-v_1$ donc la famille $\boxed{(v_1,v_2,v_3)\text{ est liée}}$.

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un certain $\mathbb{R}^n$ et déterminer, pour chacun, une famille génératrice.

1. $E_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x+2y-5z+t=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$.
2. $E_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$.
3. $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x+y-z=0 \text{ et } 2x+y+2z=0\}$.

Solution.

1. Par définition, $E_1\subset\mathbb{R}^4$ et

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid t=-3x-2y+5z \text{ et } z=-2x+y\} \\ &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid t=-3x-2y+5z \text{ et } z=-2x+y\} \\ &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid t=-3x-2y+5(-2x+y) \text{ et } z=-2x+y\} \\ &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid t=-13x+3y \text{ et } z=-2x+y\} \\ &= \{(x,y,-2x+y,-13x+3y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,-2,-13)+y(0,1,1,3) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}(u,v) \end{aligned}$$

en posant $u=(1,0,-2,-13)$ et $v=(0,1,1,3)$.

Ainsi, $\boxed{E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ et } (u,v) \text{ en est une famille génératrice}}$.

2. Par définition, $E_2 \subset \mathbb{R}^4$ et

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x-y-z\} \\ &= \{(x,y,z,-x-y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \operatorname{Vect}(u,v,w) \end{aligned}$$

en posant $u = (1,0,0,-1)$, $v = (0,1,0,-1)$ et $w = (0,0,1,-1)$.
Ainsi, $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ et } (u,v,w) \text{ en est une famille génératrice}}$.

3. Par définition, $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x+y \text{ et } y = -2x-2z\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x+y \text{ et } y = -2x-2(3x+y)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x+y \text{ et } y = -2x-6x-2y\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 3x - \frac{8}{3}x \text{ et } y = -\frac{8}{3}x\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \frac{5}{3}x \text{ et } y = -\frac{4}{3}x\right\} \\ &= \left\{\left(x, -\frac{8}{3}x, \frac{1}{3}x\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x\left(1, -\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}(u) \end{aligned}$$

en posant $u = (1, -\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$.
Ainsi, $\boxed{E_3 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ et } (u) \text{ en est une famille génératrice}}$.
Remarque. Le vecteur $3u = (3,-8,1)$ est aussi un vecteur générateur de E_3.

Exercice 10. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x+2y+3z-t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

Solution.

1. Par définition, $F \subset \mathbb{R}^4$ et $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ car $-0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 - 0 = 0$. De plus, si $v_1 = (x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $v_2 = (x_2,y_2,z_2,t_2)$ sont des éléments de F et λ est un réel alors $\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2)$ et

$$(-\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) - (\lambda t_1 + t_2) = \lambda(-x_1 + 2y_1 + 3z_1 - t_1) + (-x_2 + 2y_2 + 3z_2 - t_2) = 0$$

car v_1 et v_2 appartiennent à F donc $-x_1 + 2y_1 + 3z_1 - t_1 = -x_2 + 2y_2 + 3z_2 - t_2 = 0$.
Ainsi, $\lambda v_1 + v_2 \in F$ et on conclut que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

2. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x+2y+3z\} = \{(x,y,z,-x+2y+3z) \mid (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,2) + z(0,0,1,3) \mid (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

donc, en posant $u = (1,0,0,-1)$, $v = (0,1,0,2)$ et $w = (0,0,1,3)$, $F = \operatorname{Vect}(u,v,w)$.
Ainsi, $\boxed{(u,v,w) \text{ est une famille génératrice de } F}$.
Remarque. Le fait que $F = \operatorname{Vect}(u,v,w)$ permet d'affirmer directement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ sans avoir à faire le raisonnement de la question **1.**.

Exercice 11. On considère $e_1 = (1\,;1\,;1)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (0\,;1\,;1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Solution. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit a, b et c des réels tels que $ae_1 + b_2 + ce_3 = 0$. Alors, $a + b = 0$, $a + b + c = 0$ et $a + c = 0$. Des deux premières égalités, on déduit que $c = 0$ puis, grâce à la dernière que $a = 0$ et, enfin, grâce à la première, que $b = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$ donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En raison des dimensions, on conclut que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

Exercice 12. Soit $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } 4x + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de F.

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x - y \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x - (-4x) \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x \text{ et } y = -4x\} \\ &= \{(x\,;-4x\,;2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\,(1\,;-4\,;2) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Ainsi, en posant $v = (1\,;-4\,;2)$, $F = \mathrm{Vect}(v)$ donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. Comme $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\boxed{(v) \text{ est une base de } F}$ (et donc F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 3) \qquad e_2 = (2, 1, 4) \qquad e_3 = (1, 2, 1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$.

$$u = (1, 3, 1) \qquad v = (0, -2, 2) \qquad w = (3, 6, 3).$$

Solution.

1. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit a, b et c trois réels tels que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$. Alors,

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 & L_1 \\ b + 2c = 0 & L_2 \\ 3a + 4b + c = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 & L_1 \\ b + 2c = 0 & L_2 \\ -2b - 2c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 & L_1 \\ b + 2c = 0 & L_2 \\ 2c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

   Le dernier système est échelonné et possède 3 pivots. C'est donc un système de Cramer homogène. L'unique solution est donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre et, grâce à la dimension, on conclut que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. On cherche des réels a, b et c tels que $(1,3,1) = a(1,0,3) + b(2,1,4) + c(1,2,1)$ i.e.

$$\begin{cases} a+2b+c=1 & L_1 \\ b+2c=3 & L_2 \\ 3a+4b+c=1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=1 & L_1 \\ b+2c=3 & L_2 \\ -2b-2c=-2 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=1 & L_1 \\ b+2c=3 & L_2 \\ 2c=4 & L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{cases}$$

En remontant le système, on en déduit que $c = 2$, $b = -1$ et $a = 1$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont } (1,-1,2)}$.

Ensuite, on cherche des réels a, b et c tels que $(0,-2,2) = a(1,0,3) + b(2,1,4) + c(1,2,1)$ i.e.

$$\begin{cases} a+2b+c=0 & L_1 \\ b+2c=-2 & L_2 \\ 3a+4b+c=2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 & L_1 \\ b+2c=-2 & L_2 \\ -2b-2c=2 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 & L_1 \\ b+2c=-2 & L_2 \\ 2c=-2 & L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{cases}$$

En remontant le système, on en déduit que $c = -1$, $b = 0$ et $a = 1$. Ainsi, on conclut que $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont } (1,0,-1)}$.

Enfin, on constate que $w = 3e_3$ donc $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ sont } (0,0,3)}$.

Exercice 14. Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \text{ et } 2x-y+z=0 \text{ et } -x+2y-z=0\}$.

2. $E_2 = \mathrm{Vect}((1,2,3),(0,1,5))$.

3. $E_3 = \mathrm{Vect}((1,0,1),(2,5,1),(-1,5,-2))$.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=-x \text{ et } z=y-2x \text{ et } z=-x+2y\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=-x \text{ et } z=-3x \text{ et } z=-3x\} \\ &= \{(x,-x,-3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1,-3) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,-1,-3)) \end{aligned}$$

Comme $u = (1,-1,-3) \neq (0,0,0)$, E_1 est la droite vectorielle engendrée par u donc $\boxed{\dim(E_1) = 1}$.

2. Les deux vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (0,1,5)$ ne sont pas colinéaires donc ces deux vecteurs forment une famille libre. On en déduit que $\boxed{\dim(E_2) = 2}$ i.e. E_2 est un plan vectoriel.

3. Notons $u = (1,0,1)$, $v = (2,5,1)$ et $w = (-1,5,-2)$. On constate que $-3u + v = w$ donc $E_3 = \mathrm{Vect}(u,v)$. Or, les deux vecteurs u et v sont non colinéaires donc (u,v) est libre et ainsi $\boxed{\dim(E_3) = 2}$ i.e. E_3 est un plan vectoriel.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est liée.
2. On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer une base de F.
3. On pose $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.
4. Montrer que $F = G$.

Solution.

1. On remarque que $w = u + v$ donc $\boxed{(u, v, w) \text{ est liée}}$.
2. Comme $w = u + v$, $F = \text{Vect}(u, v)$. Or, les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre que $\boxed{(u, v) \text{ est une base de } F}$.
3. On remarque que

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - 2y\} = \{(x, y, -x - 2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$\{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(s, t)$$

en posant $s = (1, 0, -1)$ et $t = (0, 1, -2)$. Ainsi, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$. Comme les deux vecteurs s et t ne sont pas colinéaires, (s, t) est une famille libre et donc $\boxed{(s, t) \text{ est une base de } G}$.

4. Comme $1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$ et $0 + 2 \times (-1) + 2 = 0$, les vecteurs u et v appartiennent à G donc $\text{Vect}(u, v) \subset G$ i.e. $F \subset G$. Or, $\dim(F) = 2$ et, d'après la question précédente, $\dim(G) = 2$. Par théorème, on conclut que $\boxed{F = G}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère, d'une part, les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0) \qquad v = (0, 1, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad w = (1, 1, 1, 1)$$

et, d'autre part, les vecteurs

$$x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

1. Déterminer les dimensions de F et de G.
2. On pose $H = F \cap G$.
   - **a.** Justifier que $\dim(H) \in \{0, 1, 2\}$.
   - **b.** Montrer que si $\dim(H) = 2$ alors $x \in F$ et aboutir à un contradiction.
   - **c.** Montrer que si $\dim(H) = 0$ alors (u, v, w, x, y) est libre et aboutir à une contradiction.
   - **d.** En déduire la dimension de H.

Solution.

1. • Montrons que la famille (u, v, w) est libre. Soit a, b et c des réels. Alors, $au + bv + vw = (a + c, b + c, a - b + c, c)$ donc

$$au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc (u, v, w) est libre et ainsi (u, v, w) est une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$ donc $\boxed{\dim(F) = 3}$.

• Montrons que la famille (x, y) est libre. Soit a et b des réels. Alors, $ax + by = (b, b, a, -b)$ donc $ax + by = (0, 0, 0, 0)$ si et seulement si $a = b = 0$ donc (x, y) est libre et, comme précédemment, $\boxed{\dim(G) = 2}$.

2. **a.** Comme $H \subset G$, $\dim(H) \leqslant 2$ donc $\boxed{\dim(H) \in \{0, 1, 2\}}$.

b. Supposons que $\dim(H) = 2$. Alors, en raison des dimensions, $H = G$ donc $G \subset F$. En particulier, $x \in F$ donc il existe des réels a, b et c tels que $x = au + bv + cw$. Or, comme on l'a vu précédemment, $au + bv + vw = (a + c, b + c, a - b + c, c)$ donc

$$au + bv + cw = x \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a - b + c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \iff\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

et on obtient un système incompatible. C'est absurde donc $\boxed{\dim(H) \neq 2}$.

c. Supposons que $\dim(H) = 0$ c'est-à-dire que $H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Montrons qu'alors (u, v, w, x, y) est libre. Soit a, b, c, d et e des réels tels que $au + bv + cw + dx + ey = 0$. Alors, $au + bv + cw = -dx - dy$ donc $au + Bv + cw \in F \cap G = H$. Ainsi, $au + bv + cw = 0_{\mathbb{R}^4}$ mais comme (u, v, w) est libre, on en déduit que $a = b = c = 0$. Dès lors, $dx + ey = 0_{\mathbb{R}^4}$ et, comme (x, y) est libre, $d = e = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = e = 0$ donc (u, v, w, x, y) est libre. Or, ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 donc le cardinal d'une famille libre ne peut pas excéder 4. On arrive à une absurdité donc $\boxed{\dim(H) \neq 0}$.

d. On a vu que $\dim(H) \in \{0\,;1\,;2\}$, que $\dim(H) \neq 2$ et que $\dim(H) \neq 0$ donc on conclut que $\boxed{\dim(H) = 1}$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u, v, w) avec $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.

2. (u, v, w, x) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $x = (0, 2, -1, 1)$.

Solution.

1. La matrice de (u, v, w) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a le même rang successivement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Il y a trois pivots donc le rang de M est 3 et ainsi le rang de $\boxed{(u, v, w) \text{ est égal à } 3}$.

2. La matrice de (u, v, w, x) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a le même rang successivement que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_2 \end{matrix}$$

Il y a deux pivots donc le rang de M est 2 et ainsi $\boxed{\text{le rang de } (u, v, w, x) \text{ est égal à } 3}$.