⧫ Corrigés des exercices du chapitre 16

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie puis calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

$$a)\ u_n = -n^2 + n + 1\ ; \qquad b)\ u_n = \sqrt{2n-9}\ ; \qquad c)\ u_n = \sin\left(\frac{5\pi}{n}\right)\ ; \qquad d)\ u_n = (-1)^n.$$

Solution.

a) La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ses 4 premiers termes sont $u_0 = -0^2+0+1 = 1$, $u_1 = -1^2 + 1 + 1 = 1$, $u_2 = -2^2 + 2 + 1 = -1$ et $u_3 = -3^2 + 3 + 1 = -5$.

b) Le nombre u_n existe si et seulement si $2n - 9 \geqslant 0$ i.e. $n \geqslant 4{,}5$. On en déduit que (u_n) est définie à partir du rang 5 et ses 4 premiers termes sont $u_5 = \sqrt{2 \times 5 - 9} = 1$, $u_6 = \sqrt{2 \times 6 - 9} = \sqrt{3}$, $u_7 = \sqrt{2 \times 7 - 9} = \sqrt{5}$ et $u_8 = \sqrt{2 \times 8 - 9} = \sqrt{7}$.

c) Le nombre u_n existe si et seulement si $n \neq 0$ donc (u_n) définie à partir du rang 1 et ses 4 premiers termes sont $u_1 = \sin(5\pi) = 0$, $u_2 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $u_3 = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_4 = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ses 4 premiers termes sont $u_0 = (-1)^0 = 1$, $u_1 = (-1)^1 = -1$, $u_2 = (-1)^2 = 1$ et $u_3 = (-1)^3 = -1$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants,

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

$$a)\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases} ;\quad b)\ \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{u_n} \end{cases} ;\quad c)\ \begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases}.$$

Solution.

a) Les 4 premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 4$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 9$ et $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 16$.

On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation. Comme $(0+1)^2 = 1^2 = 1 = u_0$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = (n+1)^2$. Alors,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2}$.

b) Les 4 premiers termes de (u_n) sont $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - \mathrm{e}^{u_0} = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$, $u_2 = 1 - \mathrm{e}^{u_1} = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$ et $u_3 = 1 - \mathrm{e}^{u_2} = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$.

On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation. Par définition, $u_0 = 0$ donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 0$. Alors, $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{u_n} = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$ donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 0}$.

c) Les 4 premiers termes de (u_n) sont $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{u_0+1}{u_0-1} = 0$, $u_2 = \dfrac{u_1+1}{u_1-1} = -1$ et $u_4 = \dfrac{u_3+1}{u_3-1} = 0$.

On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Montrons-le par récurrence.

Initialisation. Comme $-\dfrac{1+(-1)^0}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 = u_0$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = -\dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{u_n+1}{u_n-1} = \frac{-\frac{1+(-1)^n}{2}+1}{-\frac{1+(-1)^n}{2}-1} = \frac{(-\frac{1+(-1)^n}{2}+1)\times 2}{(-\frac{1+(-1)^n}{2}-1)\times 2} = \frac{-1-(-1)^n+2}{-1-(-1)^n-2} \\
&= \frac{1-(-1)^n}{-3-(-1)^n} = \frac{[1-(-1)^n]\,[-3+(-1)^n]}{[-3-(-1)^n]\,[-3+(-1)^n]} \\
&= \frac{-3+(-1)^n+3(-1)^n-(-1)^{2n}}{(-3)^2-[(-1)^n]^2} = \frac{-3+4(-1)^n-1}{9-1} = \frac{-4+4(-1)^n}{8} \\
&= \frac{-1+(-1)^n}{2} = -\frac{1-(-1)^n}{2} = -\frac{1+(-1)(-1)^n}{2} \\
&= -\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{1+(-1)^n}{2}}$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) (éventuellement à partir d'un certain rang).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 1$;

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+2}$;

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

4. $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n$.

5. $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-2u_n)$.

6. $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n^2 + 4u_n + 5)$

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (n^2 - 3n + 1) \\
&= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1 - n^2 + 3n - 1 = 2n - 2
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n \geqslant q0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $0 \leqslant n \leqslant n+1$ donc $0 < n+2 \leqslant (n+1)+2$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{n+2} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)+2}$ i.e. $u_n \geqslant u_{n+1}$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

3. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ car c'est un quotient de produits d'entiers strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{3 \times 3^n}{(n+1) \times n!} \times \dfrac{n!}{3^n} = \dfrac{3}{n+1}$.

Or, pour tout $n \geqslant 2$, $n+1 \geqslant 3 > 0$ et donc $\dfrac{3}{n+1} \leqslant 1$ c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. Comme (u_n) est à termes strictement positifs, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 2}$.

4. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison -2 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times (-2)^n = (-2)^n$. Ainsi, le signe de u_n alterne selon la parité de n donc $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas monotone}}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n - 2u_n^2 - u_n = -2u_n^2 \leqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

6. Considérons la polynôme $X^2 + 4X + 5$. Son discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$ donc $X^2 + 4X + 5$ atteint son minimum en $-\dfrac{4}{2 \times 1} = -2$ et ce minimum vaut $(-2)^2 + 4 \times (-2) + 5 = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $x^2 + 4x + 5 \geqslant 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 + 4u_n + 5 \geqslant 1$. Par croissance de ln sur $]0\,;+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n^2 + 4u_n + 5) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

Exercice 4. Déterminer les variations des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

$$\textbf{a. } u_n = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n+1} \qquad \textbf{b. } v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \textbf{c. } w_n = \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

Solution. a. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{x+1}$ définie sur $I = [0\,;+\infty[$. La fonction f est dérivable sur I comme composée et quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(x+1) - \mathrm{e}^{-x} \times 1}{(x+1)^2} = -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Or, pour tout réel $x \geqslant 2$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $x+2 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, f est croissante sur I. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-(2n+2)+(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$ donc $(2n+1)(2n+2) > 0$ et ainsi $v_{n+1} - v_n < 0$. On conclut donc que $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est un quotient de produits d'entiers naturels non nuls donc $w_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+2)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!(n+2)}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{n+2}{2}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ donc $n+2 \geqslant 2 > 0$ donc $\dfrac{n+2}{2} \geqslant 1$. Ainsi, comme (w_n) est à termes positifs, on conclut que $\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.

Exercice 5.

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n!$.
2. Étudier les variations de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
3. Étudier les variations de la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $n+1 \geqslant 1$ (car $n \geqslant 0$) et $n! \geqslant 0$ (c'est un produit de nombres positifs) donc $(n+1) \times n! \geqslant 1 \times n!$ i.e. $(n+1)! \geqslant n!$ soit encore $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 > 0$ et $n! > 0$ donc $v_n > 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1) \times n!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$
   Pour $n \geqslant 2$, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $n^2 \geqslant 4$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{4}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leqslant 1$. On peut donc conclure que $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n > 0$ et $n! > 0$ donc $w_n > 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \times n!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$
   Or, comme $n > 0$, $1 + \frac{1}{n} \geqslant 1$ donc, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $[0\,;+\infty[$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1^n = 1$ i.e. $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geqslant 1$. On peut donc conclure que $\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.

Exercice 6. Dans chaque cas, étudier les variations de la suite (u_n).

$$a)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ ; \qquad b)\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\ ; \qquad c)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Solution.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \geqslant u_n$$
car $n > 0$ donc $\frac{1}{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$
donc $v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$. Or, le signe de cette différence alterne avec la parité de n donc $\boxed{(v_n) \text{ n'est pas monotone}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$w_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2}$$

donc

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - (4n^2 + 4n + 2n + 2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

car $n \geqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante}}$.

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.

2. Étudier les variations de (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Solution.

1. $u_0 = \dfrac{2}{3}$, $u_1 = \dfrac{3}{4}$, $u_2 = \dfrac{4}{5}$ et $u_3 = \dfrac{5}{6}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions affines et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+3) - (x+2) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0$$

donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Étant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, par théorème, on peut affirmer que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n+2 \leqslant n+3$ donc, en divisant par $n+3 > 0$, $0 \leqslant \dfrac{n+2}{n+3} \leqslant 1$ i.e. $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bornée par } 0 \text{ et } 1}$.

Remarque. Comme (u_n) est croissante, on peut également dire qu'elle est minorée par $u_0 = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n + 6$. Montrer que (u_n) est minorée par 2.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - 2 = n^2 - 4n + 6 - 2 = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2 \geqslant 0$$

donc $u_n \geqslant 2$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } 2}$.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que (u_n) est majorée par 3.
2. En déduire le sens de variation de (u_n).

Solution.

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 3$ ».
Initialisation. Comme $u_0 = 1 \leqslant 3$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors, $u_n \leqslant 3$ donc $\frac{1}{3}u_n \leqslant 1$ (car $\frac{1}{3} > 0$) et ainsi $\frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant 3$ i.e. $u_{n+1} \leqslant 3$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$ i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } 3}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(3 - u_n).$$
Or, d'après la question précédente, $u_n \leqslant 3$ donc $3 - u_n \geqslant 0$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante}}$.

Exercice 10. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
Initialisation. Par définition, $u_1 = 1$ donc u_1 est bien défini et $u_1 > 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, u_n est bien défini et $u_n > 0$. Dès lors, $1 + u_n > 0$ donc $1 + u_n \neq 0$ et ainsi $\dfrac{u_n}{1 + u_n}$ existe donc u_{n+1} est bien défini. De plus, u_{n+1} est une quotient de deux nombres strictement positifs donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que la suite $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$ et, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_{n+1} \times \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{1 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n}.$$
Or, $u_n > 0$ donc $1 + u_n > 1$ et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{1 + u_n} < 1$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc, comme (u_n) est à termes positifs, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H(n)$: « $u_n = \frac{1}{n}$ ».

Initialisation. Par définition, $u_1 = 1 = \frac{1}{1}$ donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Alors,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n+1}$$

donc $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}}$.

Exercice 11. Dans chaque cas, déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

a) $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ b) $u_n = -n^3 + n^2 - 2n + 1$ c) $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{2n^3+n+1}$

d) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ e) $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ f) $u_n = \dfrac{3^n+4^n}{5^n}$

Solution.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b) Pour tout $n > 0$, $u_n = n^3\left(-1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} = -1$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

c) Pour tout $n > 0$,

$$u_n = \frac{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^3(2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{n(2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}.$$

Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} = 2$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}) = +\infty$ et finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+3}+\sqrt{n} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

e) Comme $\frac{3}{2} > 1$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$ et $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$. Par somme, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 12. Calculer les limites des suites définies par leur terme général ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^n}$ **2.** $u_n = \sqrt{4+\dfrac{1}{n}}$ **3.** $u_n = \dfrac{e^{-n}}{n+1}$ **4.**$u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Solution.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\mathrm{e}^n = +\infty$ et, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{1}{n} = 4$ et $\lim\limits_{x\to 4} = \sqrt{4} = 2$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n(n+1)}$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n(n+1) = +\infty$ et, finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 13. Dans chaque cas, déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

a) $u_n = 2n + \sin(n)$ b) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n+1}$ c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ d) $u_n = (-1)^n \cos(n) - \sqrt{n}$.

Solution.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) \geqslant -1$ donc $u_n \geq 2n-1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(n^2) \leqslant 1$ donc, comme $n+1 > 0$, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc comme $n+1 > 0$, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n \cos(n)| = |(-1)^n|\,|\cos(n)| \leqslant 1 \times 1 = 1$ donc $(-1)^n \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1-\sqrt{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\sqrt{n} = -\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

Exercice 14. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2n+\sin(n)}{n+\cos(n)}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{2n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n-1}$.

2. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution.

1. Soit $n \geqslant 2$. D'une part, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc [1] $2n-1 \leqslant 2n+\sin(n) \leqslant 2n+1$. D'autre part, $-1 \leqslant \cos(n) \leq 1$ donc $n-1 \leqslant n+\cos(n) \leq n+1$. Or, comme $n \geqslant 2$, $n-1 > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, [2] $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+\cos(n)} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

Comme les inégalités [1] et [2] portent sur des nombres positifs, on peut multiplier membre à membre ces inégalités ce qui donne $\dfrac{2n-1}{n+1} \leqslant \dfrac{2n+\sin(n)}{n+\cos(n)} \leqslant \dfrac{2n+1}{n-1}$ i.e. $\boxed{\dfrac{2n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n-1}}$.

2. Pour tout $n > 0$, $\dfrac{2n-1}{n+1} = \dfrac{n(2-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$. Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$.

De même, pour tout $n > 0$, $\dfrac{2n+1}{n-1} = \dfrac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$. Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n-1} = 2$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ donc, par le théorème d'encadrement que $\boxed{(u_n) \text{ converge et que sa limite est } 2}$.

Exercice 15. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont on donne le terme général.

a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ **b.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ **c.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ **d.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

Solution.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Dès lors,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \times n = \sqrt{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n^2 + k^2 \geqslant n^2 > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $0 < \dfrac{1}{n^2+k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Dès lors,

$$0 \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n^2 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$ donc, par croissance de la fonction racine carré sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+n}$ i.e. comme n est positif, $n \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+n}$. Dès lors, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Dès lors, en sommant ces inégalités,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \times n = 1.$$

De plus,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1$ et, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+n} = 1$.

Ainsi, grâce au théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$. d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $n \leqslant k \leqslant 2n$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $n^2 \leqslant k^2 \leqslant (2n)^2 = 4n^2$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{4n^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi, en sommant ces inégalités,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2}.$$

Or,

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4}\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et on conclut, grâce au théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 16. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

a. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ **b.** $u_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ **c.** $u_n = \dfrac{\sin(n!)}{n + (-1)^{n+1}}$

Solution.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n(1 - \frac{(-2)^n}{3^n})}{3^n(1 + \frac{(-2)^n}{3^n})} = \dfrac{1 - (-\frac{2}{3})^n}{1 + (-\frac{2}{3})^n}$. Or, $\left|-\dfrac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Comme sommes et quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+2}^2 - \sqrt{n^2+1}^2}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{n^2+2-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

Or, par composition et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1} = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $n + (-1)^{n+1} \geqslant n - 1 > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{n + (-1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ Dès lors, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant |u_n| = \frac{|sin(n!|}{n + (-1)^{n+1}} = |sin(n!)| \times \frac{1}{|n + (-1)^{n+1}|} \leqslant 1 \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 17. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. Déterminer la valeur de la limite de (u_n).

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = 2$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$ ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ donc, comme $3 > 0$, $3u_n \leqslant 3u_{n+1} \leqslant 12$ donc $3u_n+4 \leqslant 3u_{n+1}+4 \leqslant 16$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{3u_n+4} \leqslant \sqrt{3u_{n+1}+4} \leqslant \sqrt{16}$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}$.
2. La question précédente assure que (u_n) est croissante et majorée par 4 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.
3. Notons ℓ la limite de (u_n). Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 3u_n + 4$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = 3\ell + 4$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}^2), on en déduit que $\ell^2 = 3\ell + 4$ i.e. $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$.
Considérons l'équation (E) : $x^2 - 3x - 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times(-4) = 25 > 0$ donc (E) possède deux solutions réelles :
$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2\times1} = -1 \qquad \text{et} x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2\times1} = 4$$
Ainsi, comme ℓ est une solution de (E), $\ell \in \{-1\,;4\}$. Or, (u_n) est croissante donc elle est minorée par $u_0 = 0$ ce qui assure que $\ell \geqslant 0$. On conclut donc que $\boxed{\ell = 4}$.

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. Déterminer la valeur de la limite de (u_n).

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Initialisation. Comme $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = 0{,}5^2 = 0{,}25$, $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie.
Alors, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $0^2 \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant u_n^2$ i.e. $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ et ainsi P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$.
2. La question précédente assure que (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ est donc convergente}}$.
3. Notons ℓ sa limite. Alors, on a également $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell^2$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \ell^2$ i.e. $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or, (u_n) est décroissante et $u_0 = 0{,}5$ donc $\ell \leqslant 0{,}5$. Finalement, on conclut que $\boxed{\ell = 0}$.

Exercice 19. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Toute suite réelle monotone est convergente.
2. Toute suite réelle convergente est monotone.
3. Si (u_n) est une suite divergente alors (u_n^2) est une suite divergente.
4. Si (u_n) est une suite convergente alors (u_n^2) est une suite convergente.

Solution.

1. L'affirmation est fausse. Par exemple, si on considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n$ alors (u_n) est croissante mais diverge vers $+\infty$.
2. L'affirmation est fausse. Par exemple, si on considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-0{,}5)^n$ alors (u_n) est convergente car $-1 < -0{,}5 < 1$ mais (u_n) n'est pas monotone car le signe de u_n alterne selon la parité de n.
3. L'affirmation est fausse. En effet, si on considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$ alors (u_n) est divergente. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = [(-1)^2]^n = 1$ donc (u_n^2) converge vers 1.
4. L'affirmation est vraie. Par théorème, si (u_n) converge vers ℓ alors (u_n^2) converge vers ℓ^2 par produit de deux suites convergentes.

Exercice 20. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement positive.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n > 0$ ».
   Initialisation. Comme $u_0 = 1 > 0$, $P(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $u_n > 0$ et, comme la fonction exp est à valeurs strictement positives, $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ donc, par produit, $u_n \mathrm{e}^{-u_n} > 0$ i.e. $u_{n+1} > 0$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \dfrac{u_n \mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n}$. Or, comme $u_n > 0$, $-u_n < 0$ donc, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-u_n} < 1$. Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc, comme (u_n) est à valeurs positives, on conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
3. D'après les questions précédentes, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geqslant 0}$.
   Ainsi, on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ et, comme $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une produit et une composée de fonction de références définies en ℓ, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \mathrm{e}^{-u_n} = \ell \mathrm{e}^{-\ell}$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \ell \mathrm{e}^{-\ell}$. Dès lors, $\ell(1 - \mathrm{e}^{-\ell}) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\mathrm{e}^{-\ell} = 1$ i.e. $\ell = 0$ ou $-\ell = 0$ soit finalement $\boxed{\ell = 0}$.

Exercice 21. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1\,;3[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(u_n-1)}{u_n}$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».
   Initialisation. Puisque $u_0 = 2$, P_0 est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$. En multipliant par $-3 < 0$, $-1 \geqslant -\dfrac{1}{u_n} \geqslant -3$ et donc $3 \geqslant 4 - \dfrac{3}{u_n} \geqslant 1$ i.e $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. Ainsi, P_{n+1} est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3}$.
2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{3}{u_n} - u_n = \frac{4u_n - 3 - u_n^2}{u_n} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 3}{u_n}.$$

   Or, $(3-u_n)(u_n-1) = 3u_n - 3 - u_n^2 + u_n = -u_n^2 + 4u_n - 3$ donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)(u_n-1)}{u_n}}.$$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question **1.**, $3-u_n \geqslant 0$ et $u_n - 1 \geqslant 0$ donc $(3-u_n)(1-u_n) \geqslant 0$. De plus, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n > 0$. On en déduit que $\dfrac{(3-u_n)(u_n-1)}{u_n} \geqslant 0$ i.e. d'après la question **2.a.**, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
3. D'après la question **2.b.**, (u_n) est croissante et d'après la question **1.**, (u_n) est majorée par 3. On déduit alors du théorème de la limite monotone que (u_n) converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$ donc, par opérations sur les limites et étant donné que $\ell \neq 0$ car (u_n) est minorée par $u_0 = a > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{\ell}$.
   Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = 4 - \dfrac{3}{\ell}$ i.e. $4 - \dfrac{3}{\ell} - \ell = 0$. Dès lors, par un calcul analogue à celui de la question **2.a.**, on en déduit que $\dfrac{(3-\ell)(\ell-1)}{\ell} = 0$. Il s'ensuit que $(3-\ell)(\ell-1) = 0$ donc $\ell = 3$ ou $\ell = 1$. Or, comme on l'a dit, (u_n) est minorée par $a > 1$ donc $\ell > 1$. Ainsi, $\boxed{\ell = 3}$.

Exercice 22. Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par son terme général.

1. $u_n = n^2 - n + 1$ **2.** $u_n = n + \sqrt{n}$ **3.** $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

4. $u_n = \dfrac{n^2+5}{n+1}$ **5.** $u_n = (n+3)^{2022}$ **6.** $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^n)$

Solution.

1. u_n est un polynôme en n donc $\boxed{u_n \sim n^2}$.

2. Pour tout $n > 0$, $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{n+\sqrt{n}}{n} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\boxed{u_n \sim n}$.

3. Pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{n}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}}$.

4. $u_n \sim \dfrac{n^2}{n} \sim n$ donc $\boxed{u_n \sim n}$.

5. $n+3 \sim n$ donc, par propriété, $(n+3)^{2024} \sim n^{2024}$ i.e. $\boxed{u_n \sim n^{2024}}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(\mathrm{e}^n\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}+1\right)\right) = \ln(\mathrm{e}^n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right) = n + \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right)$ donc, pour tout $n > 0$, $\dfrac{u_n}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right) = 0$. Par produit, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$. Ainsi, $\boxed{u_n \sim n}$.

Exercice 23. Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple puis la limite de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2 - n$ **2.** $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ **3.** $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

4. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **5.** $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$ **6.** $u_n = \dfrac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}} - 1}$

7. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ **8.** $u_n = \sin\left(\dfrac{3n+4}{(n+1)^2}\right)$ **9.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Solution.

1. $\boxed{u_n \sim n^2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. $\dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{n}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2} = 0$. Dès lors, $\boxed{u_n \sim \dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0}$.

3. Pour tout $n > 0$, $u_n = \ln\left(1 + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, comme cos est continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 = 0$. Ainsi,, $u_n \sim \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}$ donc $\boxed{u_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2n^2} = 0}$.

4. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2n^2}$ et ainsi $\boxed{u_n\sim\frac{n}{2n^2}\sim\frac{1}{2n}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0}$.

5. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+n=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1=2$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\sim 2$ et ainsi $\boxed{u_n\sim 2n}$. Par suite, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2n=+\infty}$.

6. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{(\frac{1}{n})^2}{2}\sim\frac{1}{2n^2}$ et, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $e^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$. Dès lors, $\boxed{u_n\sim\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}\sim\frac{1}{2}}$ et, par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}}$.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{3^n(\frac{2^n}{3^n}-1)}{3^n(\frac{2^n}{3^n}+1)}=1-\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}+\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\frac{(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{2}{3})^n+1}$. Or, $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et donc, comme somme et quotient, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$ et $\boxed{u_n\sim 1}$.

8. $\frac{3n+4}{(n+1)^2}\sim\frac{3n}{n^2}\sim\frac{3}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{(n+1)^2}=0$. Ainsi, $\sin\left(\frac{3n+4}{(n+1)^2}\right)\sim\frac{3n+4}{(n+1)^2}\sim\frac{3}{n}$ i.e. $\boxed{u_n\sim\frac{3}{n}}$ et, par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0}$.

9. Pour tout $n>0$, $u_n=\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2n}$ et ainsi $\boxed{u_n\sim\frac{\sqrt{n}}{2n}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}}$. Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0}$.

Exercice 24. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=1 \text{ et, pour tout } n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=1+u_n^2.$$

1. Justifier que, pour tout réel x, $x^2-x+1>0$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge et on note ℓ sa limite.
   - **a.** Justifier que $\ell=\ell^2+1$.
   - **b.** En déduire une contradiction.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution.

1. Le discriminant du polynôme $X^2 - X + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc cette fonction est du signe de $a = 1$ i.e. $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^2 - x + 1 > 0}$.
2. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - u_n + 1 > 0$ donc $1 + u_n^2 > u_n$ i.e. $u_{n+1} > u_n$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
3. **a.** Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on a également $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. De plus, par opération sur les limites, $u_n^2 + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2 + 1$ i.e. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2 + 1$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on conclut que $\boxed{\ell = \ell^2 + 1}$.

   b. Ainsi, $\ell^2 - \ell + 1 = 0$ ce qui est absurde car, d'après la question **1.**, pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$ donc $x^2 - x + 1 \neq 0$. On en déduit donc que $\boxed{(u_n) \text{ ne converge pas}}$.
4. Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite finie ou infinie. Or, on a vu à la question précédente que (u_n) n'a pas de limite finie donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 25. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$. On admet que (u_n) est bien définie.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique.
3. En déduire le terme général de (u_n) ainsi que sa limite.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n \neq 1$ ».

   Initialisation. Comme $u_0 = 0 \neq 1$, $P(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie.. Si $P(n+1)$ n'est pas vraie alors $\dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} = 1$ donc $5u_n - 2 = u_n + 2$ donc $4u_n = 4$ i.e. $u_n = 1$ ce qui est absurde car $P(n)$ est vraie. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\left(\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2\right) \times (u_n + 2)}{\left(\frac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1\right) \times (u_n + 2)} = \frac{5u_n - 2 - 2(u_n + 2)}{5u_n - 2 - (u_n + 2)} = \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

   donc $v_{n+1} = \dfrac{3}{4} v_n$. Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{3}{4}}$.
3. Comme $v_0 = \dfrac{0 - 2}{0 - 1} = 2$, on déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc $u_n - 2 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n (u_n - 1)$ donc $u_n - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n u_n = 2 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ i.e. $u_n\left[1 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right] = 2 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et donc $\boxed{u_n = \dfrac{2 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n}}$.

   De plus, $\left|\dfrac{3}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et ainsi, par somme et quotient, on conclut que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

Exercice 26. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0.

d. Étudier les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$.

e. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

2. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution.

1. a. Pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ et, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ et, par différence, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $f'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, le tableau de variation de f est le suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	1

c. La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or, $f(-0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$ et $f(0) = 1 - \mathrm{e}^0 = 0$ donc $\boxed{T : y = x}$.

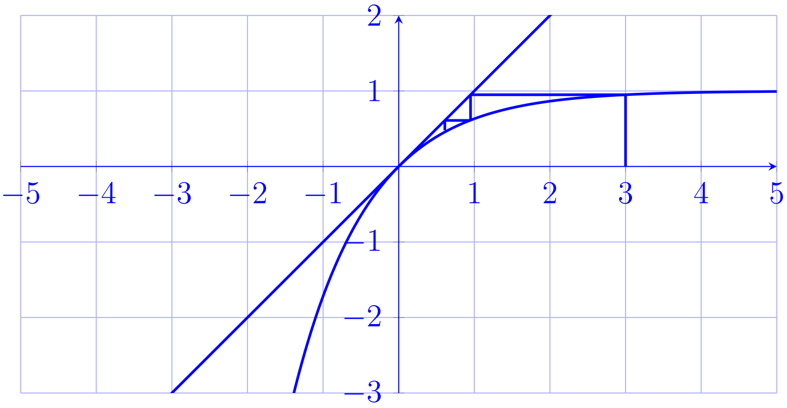
d. Posons, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - x$. On définit ainsi une fonction d dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $d'(x) = f'(x) - 1 = \mathrm{e}^{-x} - 1$. Dès lors, pour tout réel x,

$$d'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0.$$

Ainsi, comme d ne s'annule qu'en 0, on en déduit que d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc d atteint son maximum en 0. Or, $d(0) = f(0) - 0 = 0$ donc, pour tout réel x, $d(x) \leqslant 0$ i.e. $f(x) \leqslant x$.

On conclut que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } T \text{ sur } \mathbb{R}}$.

e. La courbe de f est la suivante.



2. On conjecture graphiquement que (u_n) est décroissante.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n \geqslant 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 3 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, $u_n \geqslant 0$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(u_n) \geqslant f(0)$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

4. On a vu à la question **1.d.** que, pour tout réel x, $f(x) \leqslant x$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$. Notons ℓ sa limite. Alors, d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, par propriété, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = f(\ell)$ i.e. $f(\ell) - \ell$. Autrement dit, avec les notations de la question **1.d.**, $d(\ell) = 0$. Or, l'étude des variations de d montrer que d s'annule en 0 et en 0 seulement donc $\ell = 0$.

On conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 27. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

a. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ en fonction de x.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. **a.** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2.$$

b. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}.$$

5. Sachant que $1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$, donner un rang n pour lequel le développement décimal de u_n donne les mille premiers chiffres de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

Solution.

1. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2x \times 2x - (x^2+2) \times 2}{(2x)^2} = \frac{2(x^2-2)}{(2x)^2}$$

Pour tout réel $x > 0$, $(2x)^2 > 0$ et $2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. On en déduit que, pour tout $x \in \left]0\,;\sqrt{2}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$ et, pour tout $x \in \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) \geqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]0\,;\sqrt{2}\right] \text{ et croissante sur } \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} x^2+2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Enfin, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^2(1+\frac{2}{x^2})}{2x} = \dfrac{x(1+\frac{2}{x^2})}{2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ donc par somme, produit et quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$.

Comme $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, on aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « u_n existe et $u_n \geqslant \sqrt{2}$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et vaut $\dfrac{3}{2} \geqslant \sqrt{2}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n \geqslant \sqrt{2}$. En particulier, $u_n \neq 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+2}{2u_n}$ existe. De plus, $u_{n+1} = f(u_n)$ et, comme f est minorée par $\sqrt{2}$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe donc $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$ et, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{2}}$.

2. a. Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x} - x = \dfrac{x^2+2-2x\times x}{2x} = \dfrac{2-x^2}{2x}$. Or, pour tout $x > 0$, $2x > 0$ donc le signe de $2 - x^2 = (\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$ donc de $\sqrt{2}-x$ car $\sqrt{2}+x > 0$.

Ainsi, $\boxed{g(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]0\,;\sqrt{2}\right] \text{ et } g(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc, d'après la question précédente, $g(u_n) \leqslant 0$ i.e. $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ soit encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant \sqrt{2}}$.

Dès lors, d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, par produit, somme et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2+2}{2u_n} = \dfrac{\ell^2+2}{2\ell}$. Ainsi, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = \dfrac{\ell^2+2}{2\ell}$ donc $g(\ell) = 0$. Or, l'étude du signe de g montre que g s'annule seulement en $\sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$. On conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2+2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\times\sqrt{2}\times u_n + \sqrt{2}^2}{2u_n}$$

donc $\boxed{u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}}$.

On a montré que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $2u_n \geqslant 2\sqrt{2} \geqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{1}{2u_n} \leqslant 1$ et, en multipliant par $(u_n-\sqrt{2})^2$, $\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n} \leqslant (u_n-\sqrt{2})^2$. On conclut dès lors, grâce à l'inégalité précédente, que $\boxed{u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n-\sqrt{2})^2}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}$ ».

Initialisation. $u_0 - \sqrt{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^0} = \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^1 = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^n}$.
Or, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $u_n - \sqrt{2} \geqslant 0$ et, dès lors, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$,

$$\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant \left[\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^n}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^n\times 2} = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^{n+1}}$$

et on déduit de la question **a.** que $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^{n+1}}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^n}}.$$

c. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{2} \geqslant 0$, on déduit de la question précédente que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^{2^n}$ et, comme $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2} \leqslant 10^{-1}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^n}$ donc, pour que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-1000}$, il suffit que $2^n \geqslant 1000$ i.e. $\boxed{n \geqslant 10}$.

Exercice 28. Une puce saute le long d'un axe gradué, en faisant soit des grands sauts de deux unités, soit des petits sauts d'une unité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n le nombre de façons qu'a la puce d'arriver à l'abscisse n.

1. Calculer F_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (F_n).
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
   - **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   - **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [1\,;2]$.
   - **c.** Quelle est la seule limite possible pour (u_n) ? On la note φ dans la suite. On admettra que $1{,}6 \leqslant \varphi \leqslant 1{,}7$.
   - **d.** Justifier que $1 = -\varphi(1-\varphi)$.
   - **e.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\,|u_{n+1} - \varphi| \leqslant |u_n - \varphi|$.
   - **f.** En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^n}$.
   - **g.** Démontrer finalement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$.

Solution.

1. $F_1 = 1$ car il n'y a qu'une seule façon d'arriver à l'abscisse 1, à savoir faire un petit saut.
   $F_2 = 2$ car il y a deux façons d'arriver à l'abscisse 2 : soit faire deux petits sauts soit faire un grand saut.
   $F_3 = 3$ car il y trois façons d'arriver à l'abscisse 3 : faire trois petits sauts, faire un grand saut puis un petit saut ou faire un petit saut puis un grand saut.
   $F_4 = 5$ car il y cinq façons d'arriver à l'abscisse 4 : faire quatre petits sauts, faire un grand saut puis deux petits sauts, faire deux grand saut, faire un petit saut, un grand saut et un petit saut ou faire deux petits sauts puis un grand saut.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque la puce arrive à l'abscisse $n+2$ soit elle arrive de l'abscisse $n+1$ et elle fait un petit saut soit elle arrive de l'absciise n et elle fait un grand saut. Or, il y a F_{n+1} façons d'arriver à l'abscisse $n+1$ et F_n façons d'arrivers à l'abscisse n donc $\boxed{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$.
3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,
   $$u_{n+} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$
   donc $\boxed{u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}}$.

   b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in [1\,;2]$ ».
   Initialisation. $u_1 = 1 \in [1\,;2]$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$ et ainsi $1+\dfrac{1}{2} \leqslant 1+u_n \leqslant 2$ i.e. $1{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Initialisation. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1\,;2]}$.

c. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, par quotient et somme, $1+\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\dfrac{1}{\ell}$. Dès lors, par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\ell = 1+\dfrac{1}{\ell}$ donc $\ell^2 = \ell+1$ i.e. $\ell^2-\ell-1=0$.

Le discriminant de $x^2-x-1=0$ est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-1) = 5 > 0$ donc cette équation possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\ell = x_1$ ou $\ell = x_2$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$. Comme $x_1 < 0$, on conclut que la seule limite possible pour (u_n) est $\boxed{\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

d. Par définition, $\varphi^2-\varphi-1=0$ donc $1 = \varphi^2-\varphi = -\varphi(1-\varphi)$.

e. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-\varphi| &= \left|1+\frac{1}{u_n}-\varphi\right| = \left|\frac{(1-\varphi)u_n+1}{u_n}\right| = \left|\frac{(1-\varphi)u_n-\varphi(1-\varphi)}{u_n}\right| \\ &= \frac{|(1-\varphi)(u_n-\varphi)|}{|u_n|} = \frac{\varphi-1}{u_n}\times|u_n-\varphi|.\end{aligned}$$

Or, $\varphi-1 \leqslant 0{,}7 \leqslant 1$ et $u_n \geqslant 1$ donc $\dfrac{\varphi-1}{u_n} \leqslant 1$. On conclut donc que $\boxed{|u_{n+1}-\varphi| \leqslant |u_n-\varphi|}$.

f. Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $|u_n-\varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^n}$ ».

Initialisation. $|u_1-\varphi| = 2-\varphi \leqslant 0{,}4$ et $\dfrac{1}{\varphi^1} = \dfrac{1}{\varphi} \geqslant \dfrac{1}{1{,}6} = \dfrac{5}{8} > 0{,}5$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, $|u_n-\varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^n}$ donc, en multipliant par $\dfrac{1}{\varphi} > 0$, $\dfrac{1}{\varphi}|u_n-\varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^{n+1}}$. Or, par la question précédente, $\varphi\,|u_{n+1}-\varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi}|u_n-\varphi|$ donc $\varphi\,|u_{n+1}-\varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^{n+1}}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |u_n-\varphi| \leqslant \frac{1}{\varphi^n}}.$$

g. Comme $\varphi > 1$, par théorème, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varphi^n} = 0$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\varphi| \geqslant 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\varphi| = 0$ et on conclut que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi}$.

Exercice 29. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n) et tout réel ℓ.

1. Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n-1}-u_n) = 0$ alors (u_n) converge.

3. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.

4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
5. Si (u_n) et (v_n) divergent alors $(u_n + v_n)$ diverge.
6. Si (u_n) converge et (v_n) diverge alors $(u_n + v_n)$ diverge.
7. Si (u_n) est monotone alors elle admet une limite (finie ou infinie).
8. Si (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.
9. Si (u_n) est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Solution.

1. FAUX. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} \neq 0$.
2. FAUX. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 0$ i.e. $\ln(n+1) - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour autant, la suite $(\ln(n))$ diverge vers $+\infty$.
3. FAUX. On a vu en cours que $((-1)^n)$ est bornée par -1 et 1 mais est divergente.
4. FAUX. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{1}{n}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0$.
5. FAUX. Les suites (n) et $(-n)$ divergent respectivement vers $+\infty$ et vers $(\infty$. Pour autant $(n) + (-n) = (0)$ et la suite nulle converge vers 0.
6. VRAI. En effet, supposons que (u_n) converge, que (v_n) diverge et que $(u_n + v_n)$ converge. Alors, $(v_n) = (u_n + v_n) - (u_n)$ est convergente par différence de suites convergente. C'est absurde donc, si (u_n) converge et (v_n) diverge alors $(u_n + v_n)$ diverge.
7. VRAI. C'est le théorème de la limite monotone.
8. FAUX. La suite $(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante et minorée par 0 mais elle converge vers 1.
9. VRAI. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui converge vers 0. Alors, comme (u_n) est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Dès lors, en multipliant par $|v_n| \geqslant 0$, $|u_n|\,|v_n| \leqslant M\,|v_n|$ i.e. $0 \leqslant |u_n v_n| \leqslant |M v_n|$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $M v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $|M v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dès lors, par encadrement, $|u_n v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 30. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies.

1. Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n), si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$.
2. Pour toute suite réelle (u_n), $u_{n+1} \sim u_n$.
3. $\mathrm{e}^n + \cos(n) \sim \mathrm{e}^n$.
4. Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n), si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$ alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Solution.

1. FAUX. Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 0$ mais $\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas équivalente à $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. FAUX. Par exemple, si $u_n = \mathrm{e}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{n+1-n} = e$ qui ne converge par vers 1 donc (u_{n+1}) n'est pas équivalente à (u_n).

3. VRAI. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\mathrm{e}^n + \cos(n)}{\mathrm{e}^n} = 1 + \dfrac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc, en divisant par e^n, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = 0$ et, dès lors, par le théorème d'encadrement, $\dfrac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Ainsi, par somme, $\dfrac{\mathrm{e}^n + \cos(n)}{\mathrm{e}^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\mathrm{e}^n + \cos(n) \sim \mathrm{e}^n$.

4. VRAI. En effet, par théorème, su $u_n \sim v_n$ alors $u_n^{\frac{1}{2}} \sim v_n^{\frac{1}{2}}$ i.e. $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 31. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (5+2n)}{4 \times 7 \times 10 \times \cdots \times (4+3n)}$.

1. Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n > 0$ comme produit et quotient de nombres strictement positifs et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (5+2n) \times (5+2(n+1))}{4 \times 7 \times 10 \times \cdots \times (4+3n) \times (4+3(n+1))} \times \frac{4 \times 7 \times 10 \times \cdots \times (4+3n)}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (5+2n)} \\ &= \frac{5+2(n+1)}{4+3(n+1)} = \frac{2n+7}{3n+7} \leqslant 1\end{aligned}$$

car, comme $n \geqslant 0$, $0 \leqslant 2n \leqslant 3n$ et donc $0 < 2n+7 \leqslant 3n+7$. Ainsi, on conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge par le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Le calcul précédent montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+7}{3n+7} u_n$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\dfrac{2n+7}{3n+7} \sim \dfrac{2n}{3n} \sim \dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+7}{3n+7} = \dfrac{2}{3}$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+7}{3n+7} u_n = \dfrac{2}{3}\ell$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \dfrac{2}{3}\ell$ donc $\dfrac{1}{3}\ell = 0$ et finalement $\ell = 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.