♦ Corrigés des exercices du chapitre 14

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

1. $(E_1) : y' + 4y = 0$.

2. $(E_2) : y' = 2y$

3. $(E_3) : y' = -3y$ avec la condition initiale $y(1) = 2$.

4. $(E_4) : y' = -4y + 3$ (On cherchera une solution particulière constnte.)

5. $(E_5) : y = 2y' + 5$ (On cherchera une solution particulière constnte.)

6. $(E_6) : y' + y = t^2 + 1$ (On cherchera la solution particulière sous la forme d'un trinôme du second degré.)

7. $(E_7) : y' - y = 4t\mathrm{e}^{-t}$, avec la condition initiale $y(0) = 1$. (On cherchera la solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.)

Solution.

1. Par théorème, les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. (E_2) équivaut à $y' - 2y = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{2t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. (E_3) équivaut à $y' + 3y = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_3) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-3t}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus,

$$C\mathrm{e}^{-3\times 1} = 2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-3} = 2 \Leftrightarrow C = 2\mathrm{e}^{3}$$

donc l'unique solution de (E_3) vérifiant la condition initiale $y(1) = 2$ est $t \longmapsto 2\mathrm{e}^{3}\mathrm{e}^{-3t}$ c'est-à-dire $t \longmapsto 2\mathrm{e}^{3(1-t)}$.

4. (E_4) équivaut à $y' + 4y = 3$. L'équation homogène associée est $(H_4) : y' + 4y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_4) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction constante g_0 est solution de (E_4) si et seulement si $0 + 4g_0 = 4$ c'est-à-dire $g_0 = \frac{3}{4}$.

On conclut que les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-4t} + \frac{3}{4}$ où $C \in \mathbb{R}$.

5. (E_5) est équivalente à $y' - \frac{1}{2}y = -\frac{5}{2}$. L'équation homogène associée est $(H_5) : y' - \frac{1}{2}y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_3) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction constante g_0 est solution de (E_5) si et seulement si $0 - \frac{1}{2}g_0 = -\frac{5}{2}$ c'est-à-dire $g_0 = 5$.

On conclut que les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + 5$ où $C \in \mathbb{R}$.

6. L'équation homogène associée à (E_6) est $(H_6) : y' + y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_6) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction trinôme du second degré $g_0 : t \longmapsto at^2 + bt + c$ est solution de (E_6) si et seulement si, pour tout réel t, $2at + b + at^2 + bt + c = t^2 + 1$ c'est-à-dire $at^2 + (2a + b)t + (b + c) = t^2 + 1$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $a = 1$, $2a + b = 0$ et $b + c = 1$ c'est-à-dire $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$

On conclut que les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t} + t^2 - 2t + 3$ où $C \in \mathbb{R}$.

7. L'équation homogène associée à (E_7) est $(H_7) : y' - y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_7) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction de la forme $g_0 : t \longmapsto (at + b)\mathrm{e}^{-t}$ est solution de (E_7) si et seulement si, pour tout réel t, $a\mathrm{e}^{-t} + (at + b)(-\mathrm{e}^{-t}) - (at + b)\mathrm{e}^{-t} = 4t\mathrm{e}^{-t}$ c'est-à-dire $(-2at + a - 2b) = 4t\mathrm{e}^{-t}$ soit encore, comme $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$, $-2at + a - 2b = 4t$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $-2a = 4$, $a - 2b = 0$ c'est-à-dire $a = -2$ et $b = -1$.

On conclut que les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^t + (-2t-1)\mathrm{e}^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $(E) : y' = 7y - 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$.

Solution.

L'équation (E) est équivalente à $y' - 7y = -1$. L'équation homogène associée est (H) : $y' - 7y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{7t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, en s'inspirant des exemples **4.** et **5.** de l'exercies précédent, on cherche une solution particulière constante. Une fonction constante g_0 est solution de (E) si et seulement si $0 - 7g_0 = -1$ c'est-à-dire $g_0 = \frac{1}{7}$.

On conclut que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{7t} + \frac{1}{7}$ où $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \longmapsto C\mathrm{e}^{7t} + \frac{1}{7}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 7f(t) - 1 = 7C\mathrm{e}^{7t}$ donc, comme $f'(0) = 1$, $7C = 1$ c'est-à-dire $C = \frac{1}{7}$. On conclut donc que $f : t \longmapsto \frac{1}{7}\mathrm{e}^{7t} + \frac{1}{7}$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(F) : y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (F).

2. Résoudre (F).

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) = -2 \times x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} = -2f(x) + \mathrm{e}^{-2x}.$$

Ainsi, f est solution de (F).

2. L'équation homogène associée à (F) est $(H) : y' + 2y = 0$. Les solutions de (H) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$. On conclut que les solutions de (F) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x}$ c'est-à-dire $x \longmapsto (x + C)\mathrm{e}^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $(E_1) : y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ (On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.)

2. $(E_2) : y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$ (On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{-x}$ où P est un polynôme du second degré.)

3. $(E_3) : y' + 2y = \sin(3x)$ (On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.)

Solution.

1. L'équation homogène associée à (E_1) est $(H_1) : y' + 2y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_1) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout réel x, $(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3$ c'est-à-dire $2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $2a = 1$, $2a + 2b = -2$ et $b + 2c = 3$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{9}{4}$.

On conclut que les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) : y' + y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_2) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E_2) si et seulement si, pour tout réel x, $(2ax+b)\mathrm{e}^{-x}+(ax^2+bx+c)(-\mathrm{e}^{-x})+(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $(2ax + b)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$ soit encore, comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, $2ax + b = x$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $2a = 1$ et $b = 0$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Il n'y a pas de condition sur c donc on peut prendre n'importe quelle valeur, par exemple $c = 0$.

On conclut que les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $x \longmapsto (\frac{1}{2}x^2 + C)\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. L'équation homogène associée à (E_3) est $(H_3) : y' + 2y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_3) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$ est solution de (E_3) si et seulement si, pour tout réel x, $-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x) + 2(A\cos(3x) + B\sin(3x)) = \sin(3x)$ c'est-à-dire $(2A+3B)\cos(3x) + (2B-3A)\sin(3x) = \sin(3x)$. Il suffit donc que A et B vérifient $2A + 3B = 0$ et $2B - 3A = 1$. Or,

$$\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 2B - 3A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 13A = -3 & L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ 13B = 2 & L_2 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{13} \\ B = \frac{2}{13} \end{cases}$$

On conclut que les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{13}\cos(3x) + \frac{2}{13}\sin(3x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(H_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$ **2.** $(H_2) : y'' - 4y' + 4y = 0$ **3.** $(H_3) : y'' - 2y' + 4y = 0$.

Solution

1. L'équation caractéristique associée à (H_1) est $x^2 - 5x + 6 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc l'équation caractéristique possède deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$

et ainsi les solutions de (H_1) sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

2. L'équation caractéristique associée à (H_2) est $x^2 - 4x + 4 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 4X + 4$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ donc l'équation caractéristique possède une unique solution réelle :

$$r_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$$

et ainsi les solutions de (H_2) sont les fonctions $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{2t}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

3. L'équation caractéristique associée à (H_3) est $x^2 - 2x + 4 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 2X + 4$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$ donc l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 - \mathrm{i}2\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \overline{r_1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

et ainsi les solutions de (H_3) sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}(A\cos(\sqrt{3}t) + B\sin(\sqrt{3}t))$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y'' + 2y' + y = t^2$ (On cherchera la solution particulière sous la forme d'un trinôme du second degré.
2. $(E_2) : y'' - 6y' + 5y = 25t$, avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = 2$ (On cherchera la solution particulière sous la forme d'une fonction affine.)
3. $(E_3) : y'' + y = \cos(t)$ (On cherchera la solution particulière sous la forme $t \mapsto at\cos(t) + bt\sin(t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.)
4. $(E_4) : y'' - 5y' + 6y = t$ (On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.)

Solution.

1. L'équation homogène associée à (E_1) est $(H_1) : y''+2y'+y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2+2x+1 = 0$ c'est-à-dire $(x+1)^2 = 0$ dont l'unique solution réelle est $r = -1$. Dès lors, les solutions de (H_1) sont les fonctions $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{-t}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : t \longmapsto at^2+bt+c$ est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout réel t, $2a+2(2at+b)+(at^2+bt+c) = t^2$ c'est-à-dire $at^2+(4a+b)t+2a+2b+c = t^2$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $a = 1$, $4a + b = 0$ et $2a + 2b + c = 0$ c'est-à-dire $a = 1$, $b = -4$ et $c = 6$.
On conclut que les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto (At+B)\mathrm{e}^{-t}+t^2-4t+6$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
2. L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) : y'' - 6y' + 5y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 - 6x + 5 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 6X + 5$ est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles
$$r_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 5$$
et ainsi les solutions de (H_2) sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{5t}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : t \longmapsto at + b$ est solution de (E_2) si et seulement si, pour tout réel t, $0 - 6a + 5(at + b) = 25t$ c'est-à-dire $5at + 5b - 6a = 25t$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $5a = 25$ et $5b - 6a = 0$ c'est-à-dire $a = 5$ et $b = 6$. On conclut que les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{5t} + 5t + 6$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
3. L'équation homogène associée à (E_3) est $(H_3) : y'' + y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 + 1 = 0$ donc les solutions sont i et $-\mathrm{i}$. Dès lors, les solutions de (H_3) sont les fonctions $t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t)$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
Considérons une fonction de la forme $g_0 : t \longmapsto at\cos(t) + bt\sin(t)$. Alors, pour tout réel t,
$$g_0'(t) = a\cos(t) - at\sin(t) + b\sin(t) + bt\cos(t) = (a + bt)\cos(t) + (b - at)\sin(t)$$
et
$$g_0'(t) = b\cos(t) - (a+bt)\sin(t) - a\sin(t) + (b-at)\cos(t) = (2b-at)\cos(t) - (2a+bt)\sin(t)$$
donc g_0 est solution de (E_3) si et seulement si, pour tout réel t,
$$(2b - at)\cos(t) - (2a + bt)\sin(t) + at\cos(t) + bt\sin(t) = \cos(t)$$
c'est-à-dire $2b\cos(t) - 2a\sin(t) = \cos(t)$. Ainsi, $b = \frac{1}{2}$ et $a = 0$ conviennent.
On conclut que les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t)$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

4. L'équation homogène associée à (E_4) est $(H_4) : y'' - 5y' + 6y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 - 5x + 6 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - 5X + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles
$$r_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 3$$
et ainsi les solutions de (H_4) sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : t \longmapsto at + b$ est solution de (E_4) si et seulement si, pour tout réel t, $0 - 5a + 6(at + b) = t$ c'est-à-dire $6at + 6b - 5a = t$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $6a = 1$ et $6b - 5a = 0$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{5}{36}$. On conclut que les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Les aquariophiles ont l'habitude de transporter les poissons vivants dans des sacs en plastique fermés contenant de l'eau et un mélange gazeux (habituellement de l'air). Dans de telles conditions, la concentration y en oxygène dissous (en mg.L^{-1}) vérifie l'équation différentielle :
$$(E) : y' + y = p - qt$$
où p et q sont des constantes réelles strictement positives et t le temps de transport exprimé en heures.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
3. Résoudre (E).

Solution

1. L'équation homogène associée à (E) est $(H) : y' + y = 0$. Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t}$.
2. Une fonction $g_0 : t \longmapsto at + b$ est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel t, $a + at + b = p - qt$ c'est-à-dire $at + (a + b) = -qt + p$. Ainsi, par unicité de la forme développée d'un polynôme, ceci équivaut à $a = -q$ et $a + b = p$ c'est-à-dire $a = -q$ et $b = p + q$. Une solution de (E) est donc $g_0 : t \longmapsto -qt + p + q$.
3. On conclut que les solutions de (E) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-t} - qt + p + q$.

Exercice 8. La loi de refroidissement de Newton stipule de la température T d'un objet placé, à l'instant $t = 0$, dans un milieu dont la température ambiante est T_a vérifie l'équation différentielle :
$$T' = -k(T - T_a)$$
Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu.

1. On note T_0 la température initiale. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $T(t)$.
2. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps.
Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $T(t)$ lorsque $T_a : t \longmapsto T_m \sin(\omega t)$ où T_m et ω sont des constantes réelles. (On chercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

Solution.

1. L'équation différentielle $T' = -k(T - T_a)$ équivaut à $T' + kT = kT_a$ et la solution générale de cette équation est $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-kt} + T_a$ où C est une constante réelle. La condition initiale se traduit par $T(0) = T_0$ c'est-à-dire $C + T_a = T_0$ donc $c = T_0 - T_a$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $T(t) = (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-kt} + T_a$.
2. L'équation différentielle devient (E) : $T' + kT = kT_m \sin(\omega t)$. L'équation homogène associée reste la même donc la solution générale est de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-kt} + g_0(t)$ où g_0 est une solution particulière de (E). On cherche une telle solution sous la forme $g_0 : t \longmapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ où a et b sont des constantes réelles. On a alors, pour tout $t \geqslant 0$, $g_0'(t) = -\omega a \sin(\omega t) + \omega b \cos(\omega t)$ donc

$$\begin{aligned} g_0'(t) + kg_0(t) &= -\omega a \sin(\omega t) + \omega b \cos(\omega t) + k(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)) \\ &= (ka + \omega b)\cos(\omega t) + (kb - \omega a)\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que g_0 soit solution de (E), il suffit que $ka + \omega b = 0$ et $kb - \omega a = T_m$. Or,

$$\begin{cases} ka + \omega b = 0 \\ kb - \omega a = T_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{k}{\omega}a \\ -\omega a - k\dfrac{k}{\omega}a = T_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{k}{\omega}a \\ -\dfrac{\omega^2 + k^2}{\omega}a = T_m \end{cases}.$$

On en déduit que $a = -\dfrac{\omega T_m}{\omega^2 + k^2}$ et $b = \dfrac{kT_m}{\omega^2 + k^2}$ conviennent.

Ainsi, la solution générale de (E) est $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-kt} - \dfrac{T_m}{\omega^2 + k^2}(\omega\cos(\omega t) - k\sin(\omega t))$ où C est une constante réelle.

Exercice 9. On applique une tension constante U aux bornes d'un circuit RL contenant une résistance et une bobine en série. La loi des mailles permet alors d'écrire que l'intensité I, en fonction du temps, vérifie l'équation différentielle

$$U = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

On a en plus la condition initiale $I(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation homogène associé à cette équation différentielle. On notera $\tau = \frac{L}{R}$.
2. Trouver une solution particulière constante.
3. En déduire, avec la condition initiale, l'intensité du courant dans le circuit en fonction du temps.
4. Déterminer l'instant t à partir duquel l'intensité du courant devient supérieure ou égale à $0{,}99 \times \frac{U}{R}$ (c'est-à-dire quasi-permanent à 1% près).

Solution

1. L'équation différentielle homogène associée est $LI' + RI = 0$ ce qui équivaut $I' + \frac{1}{\tau}I = 0$ en posant $\tau = \frac{L}{R}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ où $C \in \mathbb{R}$.
2. Une fonction constante égale à I_0 est solution si et seulement si $RI_0 + 0 = U$ c'est-à-dire $I_0 = \frac{U}{R}$.
3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $I : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{R}$. On chercher C telle que $I(0) = 0$ c'est-à-dire $C + \frac{U}{R} = 0$ donc $C = -\frac{U}{R}$. Ainsi, $I : t \longmapsto \frac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$.

4. On cherche t tel que $I(t) \geqslant 0{,}99\frac{U}{R}$. Or, comme $\frac{U}{R} > 0$,

$$I(t) \geqslant 0{,}99\frac{U}{R} \iff \frac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \geqslant 0{,}99\frac{U}{R} \iff 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \geqslant 0{,}99 \iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \leqslant 0{,}01$$
$$\iff -\frac{t}{\tau} \leqslant \ln(0{,}01) \iff t \geqslant -\tau\ln(0{,}01)$$

Ainsi, l'instant du courant devient supérieure ou égale à $0{,}99\frac{U}{R}$ à partir de l'instant $-\tau\ln(0{,}01) = \tau\ln(100)$.

Exercice 10. On étudie les populations de deux espèces, un prédateur (le lynx) et une proie (le lièvre des neiges). On note $x(t)$ le nombre de proies et $y(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t. On admet que x et y sont solutions des équations différentielles

$$\forall t \geqslant 0 \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où a et c sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les valeurs de x et y pour lesquelles les deux populations sont constantes.
2. Dans la suite, on étudie l'évolution du système lorsqu'il est proche du point d'équilibre (non nul). On pose, pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) = x(t) - c$ et $v(t) = y(t) - a$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t)$ et $v(t)$ sont « petits » donc on néglige les termes en $u(t)v(t)$ par rapport à $u(t)$ et à $v(t)$.
   a. Vérifier qu'on a alors approximativement, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$\begin{cases} u'(t) = -cv(t) \\ v'(t) = au(t) \end{cases} .$$
   b. En déduire une équation différentielle vérifiée par u.
   c. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente.
   d. Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, une expression de $u(t)$ en fonction de a, c, $x(0)$ et $x'(0)$.
   e. En déduire, pour tout $t \geqslant 0$, une expression de $v(t)$ en fonction de a, c, $x(0)$ et $x'(0)$.

Solution.

1. Supposons que x et y soit deux fonctions constantes solutions du système. Les dérivées de ces fonctions sont nulles donc le système dévient :
$$\begin{cases} ax - xy = 0 \\ -cy + xy = 0 \end{cases}$$
On en déduit que $xy = ax = cy$ donc $y = \frac{a}{c}x$ et donc $ax - \frac{a}{c}x^2 = 0$ soit, en multipliant par c, $ax(c - x) = 0$. Ainsi, $x = 0$ et $y = 0$ ou $x = c$ et $y = a$.
Réciproquement, si x et y sont constantes égales à 0 alors le système est bien vérifié et si x est constante égal à c et y constante égale à a alors $ax - xy = ac - ca = 0$ et $-cy + xy = -ca + ca = 0$ donc le système est vérifié.
Il y a donc deux points d'équilibre : x et y nulles ou x constante égale à c et y constante égale à a.

2. **a.** Pour tout réel $t \geqslant 0$, $u'(t) = x'(t)$ et $v'(t) = y'(t)$ donc

$$\begin{aligned} u'(t) &= a(u(t)+c) - (u(t)+c)(v(t)+a) \\ &= au(t) + ac - u(t)v(t) - au(t) - cv(t) - ac \\ &= -cv(t) - u(t)v(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v'(t) &= -c(v(t)+a) + (u(t)+c)(v(t)+a) \\ &= -cv(t) - ca + u(t)v(t) + au(t) + cv(t) + ca \\ &= au(t) + u(t)v(t) \end{aligned}$$

Ainsi, si on néglige le terme $u(t)v(t)$, on obtient bien, approximativement,

$$\begin{cases} u'(t) = -cv(t) \\ v'(t) = au(t) \end{cases}$$

b. Dès lors, pour tout réel $t \geqslant 0$, $u''(t) = -cv'(t) = -cau(t)$ donc u est solution de l'EDL2 $(E) : y'' + acy = 0$.

c. L'équation caractéristique associée à (E) est $x^2 + ac = 0$ donc les racines sont $r_1 = \mathrm{i}\sqrt{ac}$ et $r_2 = -\mathrm{i}\sqrt{ac}$ donc les solutions de (E) sont les fonctions $t \longmapsto A\cos(\sqrt{ac}t) + B\sin(\sqrt{ac}t)$.

d. D'après la question précédente, il existe des réels A et B tels que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $u(t) = A\cos(\sqrt{ac}t) + B\sin(\sqrt{ac}t)$. Or, $u(0) = x(0) - c$ donc $A\cos(0) + B\sin(0) = x(0) - c$ c'est-à-dire $A = x(0) - c$. De plus, pour tout réel t,

$$x'(t) = u'(t) = -A\sqrt{ac}\sin(\sqrt{ac}t) + B\sqrt{ac}\cos(\sqrt{ac}t)$$

donc, en évaluant 0, $x'(0) = B\sqrt{ac}$ donc $B = \frac{x'(0)}{\sqrt{ac}}$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $u(t) = (x(0) - c)\cos(\sqrt{ac}t) + \frac{x'(0)}{\sqrt{ac}}\sin(\sqrt{ac}t)$.

e. Pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = -cv(t)$ donc

$$v(t) = -\frac{1}{c}u'(t) = -\frac{1}{c}\left[-(x(0)-c)\sqrt{ac}\sin(\sqrt{ac}t) + x'(0)\cos(\sqrt{ac}t)\right]$$

donc $v(t) = (x(0)-c)\sqrt{\frac{a}{c}}\sin(\sqrt{ac}t) - \frac{x'(0)}{c}\cos(\sqrt{ac}t)$.

Exercice 11. En s'inspirant des exercices 1 et 4, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a. $(E_1) : y' + y = x^2$ **b.** $(E_2) : y' + y = 2\sin(x)$ **c.** $(E_3) : y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$

Solution.

1. L'équation homogène associée à (E_1) est $(H_1) : y' + y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_1) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout réel x, $(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2$ c'est-à-dire $ax^2 + (2a+b)x + b + c = x^2$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $a = 1$, $2a + b = 0$ et $b + c = 0$ c'est-à-dire $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$.
On conclut que les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + 2$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) : y' + y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_2) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si, pour tout réel x, $-A\sin(x) + B\cos(x) + A\cos(x) + B\sin(x) = 2\sin(x)$ c'est-à-dire $(A+B)\cos(x) + (B-A)\sin(x) = 2\sin(x)$. Il suffit donc que A et B vérifient $A + B = 0$ et $B - A = 2$. Or,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2A=-2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2B=2 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

On conclut que les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} - \cos(x) + \sin(x)$ où $C \in \mathbb{R}$.
3. L'équation homogène associée à (E_3) est $(H_3) : y' - y = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de(H_3) sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
De plus, une fonction de la forme $g_0 : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$ est solution de (E_3) si et seulement si, pour tout réel x, $(2ax+b)\mathrm{e}^x + (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x + (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$ c'est-à-dire $(2ax + b)\mathrm{e}^x = (x + 1)\mathrm{e}^x$ soit encore, comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, $2ax + b = (x + 1)$. Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que $2a = 1$ et $b = 1$ c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$. Il n'y a pas de condition sur c donc on peut prendre n'importe quelle valeur, par exemple $c = 0$.
On conclut que les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^x + (\frac{1}{2}x^2 + x)\mathrm{e}^x$ c'est-à-dire $x \longmapsto (\frac{1}{2}x^2 + x + C)\mathrm{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels t et x,

$$f(t+x) = f(t)f(x).$$

Indication. On pourra dériver par rapport à t puis évaluer l'égalité obtenue en $t = 0$ pour faire apparaître une équation différentielle.

Solution. Soit f une fonction solution du problème. Fixons un réel x. Pour tout réel t, $f(t + x) = f(t)f(x)$ donc, en dérivant par rapport à t, $f'(t + x) = f'(t)f(x)$. En particulier, pour $t = 0$, $f'(x) = f'(0)f(x)$. Ceci est valable pour tout réel x donc f est solution de l'équation $y' - f'(0)y = 0$. En posant $a = f'(0)$, on en déduit qu'il existe un réel C tel que $f : x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$. De plus, $C = f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = f(0)^2 = C^2$ donc $C = 0$ ou $C = 1$.

Réciproquement, soit a et $C \in 0\,;1$ deux réels et $f : x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$. Alors, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tous réels t et x,

$$f(t+x) = C\mathrm{e}^{a(t+x)} = C\mathrm{e}^{at+ax} = C\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{ax}$$

et, comme C vaut 0 ou 1, $C^2 = C$ donc

$$f(t+x) = C^2\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{ax} = (C\mathrm{e}^{at})(C\mathrm{e}^{ax}) = f(t)f(x).$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \in \{0\,;1\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. On cherche les fonctions numériques f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

1. Supposons que f soit solution du problème.
   a. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que f est solution de l'équation (E) $y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

c. Résoudre (E) (on cherchera une solution sous la forme $x \longmapsto a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$ où $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

d. En considérant $f'(0) + f(0)$, déterminer les valeurs possibles pour la fonction f.

2. Réciproquement, vérifier que les fonctions ainsi déterminées sont bien solutions du problème et conclure.

Solution.

1. a. Pour tout réel, $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$ donc, comme f et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. En dérivant l'égalité $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$ par rapport à x, on obtient $f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^x$. Or, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$ donc $f'(-x) = \mathrm{e}^{-x} - f(x)$ et ainsi $f''(x) - (\mathrm{e}^{-x} - f(x)) = \mathrm{e}^x$ c'est-à-dire $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. On conclut que f est bien solution de l'équation (E).

c. L'équation homogène associée à (E) est $(H) : y'' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est $x^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, les solutions de (H) sont les fonctions $t \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $(A\,;B) \in \mathbb{R}^2$.

De plus, une fonction $g_0 : x \longmapsto a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$ est solutions de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $(a\mathrm{e}^x + b(-1)^2\mathrm{e}^{-x}) + (a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $2a\mathrm{e}^x + 2b\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ donc $a = b = \frac{1}{2}$ conviennent. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit donc qu'il existe deux réels A et B tels que $f : x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$. Or, d'une part, $f'(0) + f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et, d'autre part, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= -A\sin(x) + B\cos(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + A\cos(-x) + B\sin(-x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= (A+B)\cos(x) - (A+B)\sin(x) + \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

donc $f'(0) + f(0) = A + B + 1$. On en déduit donc que $A + B = 0$ donc $B = -A$ et ainsi f est de la forme $f : x \longmapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ où $A \in \mathbb{R}$.

2. Soit A un réel et $f : x \longmapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Alors, f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, d'après le calcul précédent (avec $B = -A$), $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$ donc f est solution du problème.

On conclut que les solutions du problème sont les fonctions

$$f : x \longmapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

où $A \in \mathbb{R}$.