# ⧫ Corrigés des exercices du chapitre 13

**Exercice 1.** Dans chaque cas, déterminer l'unique fonction affine $f$ telle que :

**1.** $f(-3) = 4$ et $f(5) = 0$ **2.** $f(-3) = -2$ et $f(-5) = -2$ **3.** $f(-5) = 3$ et $f(0) = 0$.

**Solution.**

**1.** Comme $f$ est affine, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f : x \longmapsto ax + b$. Par théorème,

$$a = \frac{f(5) - f(-3)}{5 - (-3)} = \frac{8 - 4}{5 + 3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + b$.
De plus, on a, d'une part, $f(5) = 8$ et, d'autre part, $f(5) = \frac{1}{2} \times 5 + b = \frac{5}{2} + b$ donc $\frac{5}{2} + b = 8$. Ainsi, $b = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$.
On conclut donc que $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$.

**2.** Comme $f$ est affine, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f : x \longmapsto ax + b$. Par théorème,

$$a = \frac{f(-5) - f(-3)}{-5 - (-3)} = \frac{-2 - (-2)}{-5 + 3} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Ainsi, $f$ est constant et, comme $f(-3) = -2$, on conclut que $f : x \longmapsto -2$.

**3.** Comme $f$ est affine, il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $f : x \longmapsto ax + b$. Par théorème,

$$a = \frac{f(0) - f(-5)}{0 - (-5)} = \frac{0 - 3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Ainsi, $f : x \longmapsto -\frac{3}{5}x + b$.
De plus, $f(0) = 0$ donc, d'après le cours, $b = 0$. On conclut donc que $f : x \longmapsto -\frac{3}{5}x$.

**Exercice 2.** Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction affine et étudier sa parité.

**1.** $f : x \longmapsto 6x - 8$ **2.** $g : x \longmapsto -6x$ **3.** $h : x \longmapsto 8$ **4.** $k : x \longmapsto -8 - 6x$.

**Solution.**

**1.** Comme $6 > 0$, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f(1) = -2$ et $f(-1) = -14$ donc $f(1)$ n'est égal ni à $f(-1)$ ni à $-f(-1)$ et ainsi $f$ n'est ni paire ni impaire.

**2.** Comme $-6 < 0$, $g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et pour tout réel $x$, $g(-x) = -6(-x) = 6x = -g(x)$ donc $g$ est impaire.

**3.** La fonction $h$ es constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $h$ est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0 et, pour tout réel $x$, $h(-x) = 8 = h(x)$ donc $h$ est paire.

**4.** Comme $-6 < 0$, $k$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $k(1) = -14$ et $k(-1) = -2$ donc $k(1)$ n'est égal ni à $k(-1)$ ni à $-k(-1)$ et ainsi $k$ n'est ni paire ni impaire.

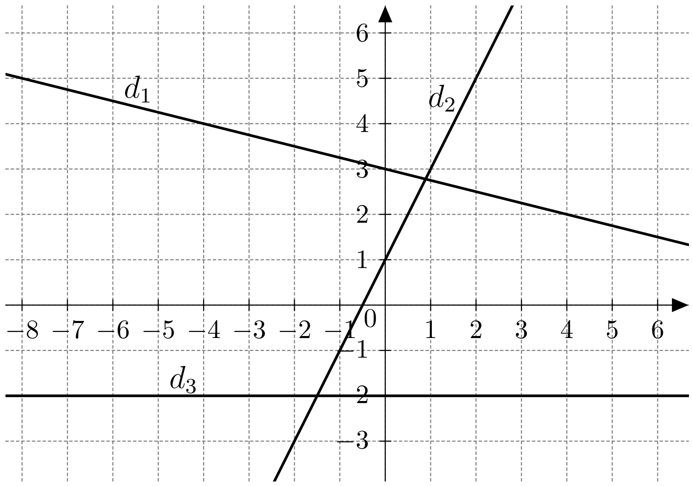
**Exercice 3.** On a tracé sur le graphique ci-contre 3 droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ qui représentent les fonctions :

$$f : x \longmapsto 2x+1$$

$$g : x \longmapsto -2$$

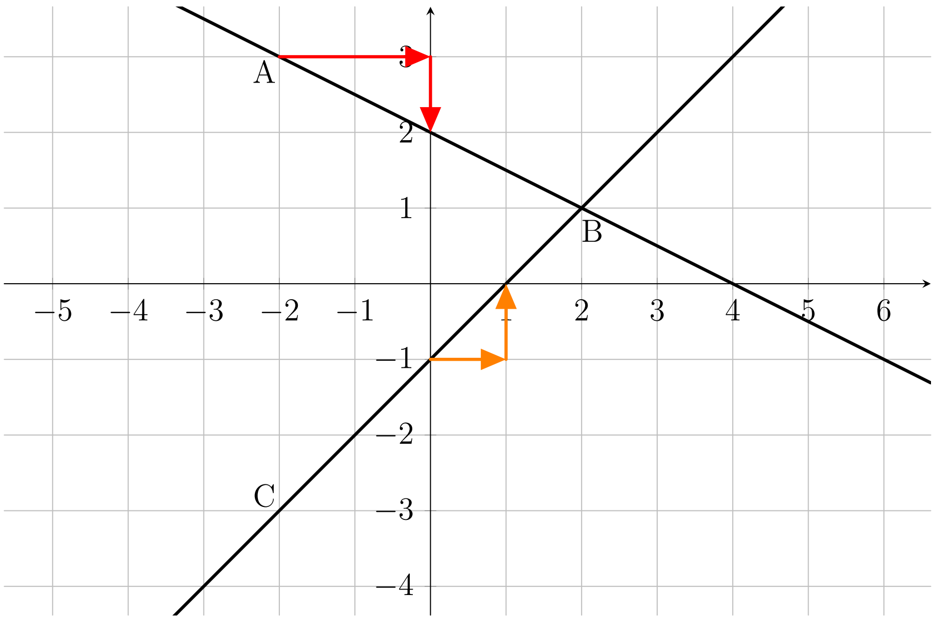
$$h : x \longmapsto -\frac{1}{4}x+3.$$

Associer, en justifiant, chaque courbe à la fonction qu'elle représente.




**Solution.** Le coefficient directeur de $d_1$ est négatif donc $d_1$ représente $h$, celui de $d_2$ est positif donc elle représente $f$ et, par conséquent, $d_3$ représente $g$.

**Exercice 4.** Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les droites (AB) et (BC) où A$(-2\,;3)$, B$(2\,;1)$ et C$(-2\,;-3)$.




1. Pour chaque droite, déterminer graphiquement son équation réduite.
2. Déterminer par le calcul les équations réduites des droites (AB) et (BC).

**Solution.**

1. La droite (AB) n'est pas verticale donc son équation réduite est de la forme $y = axbp$. Graphiquement, $b=2$ et $a = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc (AB) : $y = -\frac{1}{2}x+2$.
La droite (BC) n'est pas verticale donc son équation réduite est de la forme $y = ax+b$. Graphiquement, $b=-1$ et $a = \frac{1}{1} = 1$ donc (BC) : $y = x-1$.
2. Comme $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$, l'équation réduite de (AB) est de la forme $y = ax+b$. De plus,
$$a = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{1-3}{2-(-2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
donc l'équation réduite de (AB) est de la forme $y = -\frac{1}{2}x+b$. De plus, comme A appartient à (AB), $y_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}x_{\mathrm{A}} + b$ c'est-à-dire $3 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b$ donc $3 = 1+p$ et ainsi $b=2$. On conclut que (AB) : $y = -\frac{1}{2}x+2$.

Comme $x_{\mathrm{B}} \neq x_{\mathrm{C}}$, l'équation réduite de (BC) est de la forme $y = ax + b$. De plus,

$$a = \frac{y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}} = \frac{-3-1}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

donc l'équation réduite de (AB) est de la forme $y = x + b$. De plus, comme B appartient à (BC), $y_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}} + b$ c'est-à-dire $1 = 2 + b$ donc $b = -1$. On conclut que (BC) : $y = x - 1$.

**Exercice 5.** La fonction $f : x \longmapsto (x+1)^2 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle affine ?

**Solution.** Pour tout réel $x$, $f(x) = x^2 + 2x + 1^2 - x^2 = 2x + 1$ donc $f$ est une fonction affine.

**Exercice 6.** Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes.

$$f : x \longmapsto 3x^2 + x - 1 \qquad g : x \longmapsto -x^2 + 4x + 1 \qquad h : x \longmapsto 2 - x + x^2.$$

**Solution.**

- Pour $f$, $a = 3 > 0$ et $b = 1$ donc on a le tableau suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{13}{12}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Pour $g$, $a = -1 < 0$ et $b = 4$ donc on a le tableau suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Pour $h$, $a = 1 > 0$ et $b = -1$ donc on a le tableau suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{7}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Exercice 7.** Démontrer que, pour tout réel $p$, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

**Solution.** Considérons la fonction $f : p \longmapsto p(1-p)$. Alors, pour tout réel $p$, $f(p) = -p^2 + p$ donc $f$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = 0$. Comme $a < 0$, la fonction $f$ admet un maximum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$ i.e. pour tout réel $p$, $f(p) \leqslant f(\frac{1}{2})$. Or,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

donc on conclut que, pour tout réel $p$, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

**Exercice 8.** La fonction $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$ est-elle une fonction polynôme du second degré ?

**Solution.** D'après la formule du binôme, pour tout réel $x$,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

donc $f$ est une fonction polynôme du second degré.

**Exercice 9.** On considère les polynômes $P = X + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + 1$. Expliciter les polynômes $P - Q$, $PQ$, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

**Solution.**
$P - Q = X + 1 - (X^4 + X^2 + 1) = X + 1 - X^4 - X^2 - 1 = -X^4 - X^2 + X$.
$PQ = (X+1)(X^4 + X^2 + 1) = X^5 + X^3 + X + X^4 + X^2 + 1 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
$P \circ Q = Q + 1 = (X^4 + X^2 + 1) + 1 = X^4 + X^2 + 2$.
$Q \circ P = P^4 + P^2 + 1 = (X+1)^4 + (X+1)^2 + 1 = (X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1) + (X^2 + 2X + 1) + 1$
$= X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 3$.

**Exercice 10.**

1. Démontrer qu'il existe une unique paire $\{P, Q\}$ de polynômes unitaire et de degré 2, tels que $PQ = X^4 + 1$.
2. Soit $P$ un polynôme du second degré. Montrer qu'il existe un unique polynôme du second degré $Q$ tel que $P = Q(X+1)$.

**Solution.**

1. On cherche des polynômes $P$ et $Q$ de la forme $P = X^2 + bX + c$ et $Q = X^2 + dX + e$ où $b$, $c$, $d$ et $e$ sont des réels. On a alors

$$\begin{aligned} PQ &= (X^2 + bX + c)(X^2 + dX + e) \\ &= X^4 + dX^3 + eX^2 + bX^3 + bdX^2 + beX + cX^2 + cdX + ce \\ &= X^4 + (b+d)X^3 + (c + bd + e)X^2 + (cd + be)X + ce \end{aligned}$$

Par unicité de la forme développée d'un polynôme, on en déduit que

$$PQ = X^4 + 1 \iff \begin{cases} b + d = 0 \\ c + bd + e = 0 \\ cd + be = 0 \\ ce = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -b \\ c - b^2 + e = 0 \\ b(e - c) = 0 \\ ce = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ c + e = 0 \\ b = 0 \\ ce = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = -b \\ 2c - b^2 = 0 \\ e = c \\ c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ e = -c \\ b = 0 \\ -c^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = -b \\ 2 - b^2 = 0 \\ e = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = -b \\ -2 - b^2 = 0 \\ e = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Or, les deux équations $-c^2 = 1$ dans le premier système et $-2 - b^2 = 0$ dans le troisième n'ont pas de solution donc

$$PQ = X^4 + 1 \iff \begin{cases} d = -b \\ 2 - b^2 = 0 \\ e = 1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \\ e = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} d = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \\ e = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

On voit que les deux systèmes conduisent à la même paire de polynôme (on échange simplement $P$ et $Q$) : $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ et $X^2 - \sqrt{2} + 1$.

**2.** Soit $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = fX^2 + gX + h$ deux polynômes de degré 2. Alors,

$$\begin{aligned} Q(X+1) &= f(X+1)^2 + g(X+1) + h = f(X^2 + 2X + 1) + gX + g + h \\ &= fX^2 + (2f + g)X + f + g + h \end{aligned}$$

donc, par unicité de l'écriture sous forme développée d'un polynôme,

$$P = Q(X+1) \iff \begin{cases} f = a \\ 2f + g = b \\ f + g + h = c \end{cases} \iff \begin{cases} f = a \\ 2a + g = b \\ a + g + h = c \end{cases} \iff \begin{cases} f = a \\ g = b - 2a \\ a + (b - 2a) + h = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f = a \\ g = b - 2a \\ h = a - b + c \end{cases}$$

Ainsi, l'unique polynôme $Q$ de degré 2 tel que $P = Q(X+1)$ est $Q = aX^2 + (b-2a)X + a - b + c$.

**Exercice 11.** Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P = -X^2 + 4X + c$. Déterminer $c$ tel que $-5$ soit racine de $P$.

**Solution.** Comme $P(-5) = -(-5)^2 + 4 \times (-5) + c = -45 + c$, $P(-5) = 0$ si et seulement si $c = 45$. Ainsi, l'unique valeur de $c$ pour laquelle $-5$ est racine de $P$ est $c = 45$.

**Exercice 12.** Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et $P = X^3 + 2X^2 + m^2X + 2m^2$.

**1.** Vérifier que $-2$ est racine de $P$.

**2.** Factoriser $P$ et en déduire l'ensemble des racines de $P$.

**Solution.**

**1.** $P(-2) = (-2)^3 + 2 \times (-2)^2 + m^2 \times (-2) + 2m^2 = -8 + 8 - 2m^2 + 2m^2 = 0$ donc $-2$ est bien racine de $P$.

**2.** On sait que $P$ se factorise par $(X + 2)$ donc il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P = (X + 2)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X+2)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX+2aX^2+2bX+2c = aX^3+(2a+b)X^2+(2b+c)X+2c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$P = (X+2)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ 2b + c = m^2 \\ 2m^2 = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = m^2 \end{cases}$$

Ainsi, $P = (X+2)(X^2+m^2)$. Or, pour tout réel $x$, $x^2+m^2 > 0$ car $m \neq 0$ donc $X^2+m^2$ n'a pas de racine réelle. Ainsi, on conclut que l'ensemble des racines de $P$ est $\{-2\}$.

**Exercice 13.** On considère le polynôme $P = X^3 - 12X + 16$.

1. Vérifier que 2 est racine multiple de $P$.
2. Factoriser $P$ et en déduire l'ensemble des racines de $P$.

**Solution.**

1. $P(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 16 = 8 - 24 + 16 = 0$ donc 2 est bien racine de $P$. De plus, $P' = 3X^2 - 12$ donc $P'(2) = 3 \times 2^2 - 12 = 3 \times 4 - 12 = 0$ donc 2 est bien racine multiple de $P$.
2. On sait que $P$ se factorise par $(X-2)^2$ donc il existe des réels $a$ et $b$ tels que $P = (X-2)^2(aX+b)$. Or,

$$\begin{aligned}(X-2)^2(aX+b) &= (X^2-4X+4)(aX+b) = aX^3 + bX^2 - 4aX^2 - 4bX + 4aX + 4b \\ &= aX^3 + (b-4a)X^2 + (4a-4b)X + 4b\end{aligned}$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$P = (X-2)^2(aX+b) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ 4a - 4b = -12 \\ 4b = 16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $P = (X-2)^2(X+4)$. On en déduit que

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x - 2 = 0 \textbf{ ou } x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -4$$

donc l'ensemble des racines de $P$ est $\{-4\,;2\}$.

**Exercice 14.** On considère le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

1. Trouver une racine « évidente » de $P$.
2. Factoriser $P$ puis en déduire l'ensemble des racines de $P$.

**Solution.**

1. On vérifie que $P(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ donc 1 est une racine de $P$.
2. On sait que $P$ se factorise par $(X-1)$ donc il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $P = (X-1)(aX^2+bX+c)$. Or,

$$(X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$P = (X-2)(aX^2+bX+c) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 0 \\ -c = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $P = (X-2)(2X^2 - X - 1)$. On en déduit que

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } 2x^2 - x^2 - 1 = 0.$$

Le discriminant de $2X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$ donc $2X^2 - X + 1$ possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = 1$. Ainsi, l'ensemble des racines de $P$ est $\{-\frac{1}{2}\,;1\}$.
*Remarque.* En fait, 1 est ici racine multiple de $P$.

**Exercice 15.** En s'inspirant de l'exercice 14, résoudre les équations suivantes.

1. $(E_1) : 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
2. $(E_2) : 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$
3. $(E_3) : -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 = 0$

**Solution.**

1. $(E_1) : 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
Considérons le polynôme $f = 2X^3 + X^2 - 5X + 2$.
Comme $2 + 1 - 5 + 2 = 0$, 1 est racine évidente de $f$. Ainsi, $f$ se factorise par $X - 1$ donc il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$f = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 1 \\ c - b = -5 \\ -c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $f = (X - 1)(2X^2 + 3X - 2)$ donc

$$(E_1) \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } 2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2x^2+3x-2 = 0$$

Notons $Q = 2X^2 + 3X - 2$. Le discriminant de $Q$ est $3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$ donc $Q$ possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de $(E_1)$ est $\{1\,; -2\,; \frac{1}{2}\}$.

2. $(E_2) : 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$
Considérons $f = 4X^3 - 12X^2 + 9X - 2$.
On remarque que $f(2) = 0$ donc $f$ se factorise par $X - 2$ c'est-à-dire il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f = (X - 2)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-2aX^2-2bX-2c = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$f = (X - 2)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 4 \\ b - 2a = -12 \\ c - 2b = 9 \\ -2c = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1. \end{cases}$$

Ainsi, $f = (X - 2)(4X^2 - 4X + 1) = (X - 2)(2X - 1)^2$ donc

$$(E_2) \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

On conclut que l'ensemble des solutions de $(E_2)$ est $\left\{2\,; \frac{1}{2}\right\}$.

**3.** $(E_3) : -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 = 0$
Considérons $f = -X^3 + 7X^2 - 7X - 15$.
On constate que $f(-1) = 0$ donc $f$ se factorise par $X - (-1) = X + 1$ c'est-à-dire il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X+1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX+aX^2+bX+c = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$$

donc, par unicité de la forme développée,

$$f = (X + 1)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 7 \\ b + c = -7 \\ c = -15 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{cases}.$$

Ainsi, $f = (X + 1)(-X^2 + 8X - 15)$ donc

$$(E_1) \Leftrightarrow (x+1)(-x^2+8x-15) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } -x^2+8x-15 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x^2-8x+15 = 0$$

Le discriminant de $-X^2 + 8X - 15$ est $\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-15) = 4$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 3.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de $(E_3)$ est $\{-1\,;3\,;5\}$.

**Exercice 16.** Factoriser, lorsque cela est possible, les polynômes du second degré suivants.

$$P = 2X^2 + 5X - 7 \qquad Q = X^2 - 2X - 1 \qquad R = X^2 - X + 2 \qquad S = 9X^2 - 6X + 1.$$

**Solution.**

- Le discriminant de $P$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 81 > 0$ donc $P$ possède deux racines réelles :
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \times 2} = -\frac{7}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \times 2} = 1$$
donc $P = 2(X + \frac{7}{2})(X - 1) = (2X + 7)(X - 1)$.
- Le discriminant de $Q$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$ donc $Q$ possède deux racines réelles :
$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$
donc $P = (X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})$.
- Le discriminant de $R$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$ donc $R$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
- Le discriminant de $S$ est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$ donc $S$ possède une racine multiple $x_0 = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$ donc $Q = 9\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$.

**Exercice 17.** Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P = (m-1)X^2 + 2mX + 1 - 3m$.

1. Déterminer l'ensemble $D$ des valeurs de $m$ pour lesquelles $P$ est un polynôme du second degré.
2. Montrer que 1 est racine de $P$.
3. On suppose que $m \in D$. Factoriser $P$.

**Solution.**

1. Le degré de $P$ est 2 si et seulement si $m - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $m \neq 1$. Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. $P(1) = (m-1) + 2m + 1 - 3m = 3m - 3m = 0$ donc 1 est racine de $P$.
3. Ainsi, $P$ se factorise par $X - 1$ donc il existe des réels $a$, et $b$ tels que $P = (X-1)(aX+b)$. Or,
$$(X-1)(aX+b) = aX^2 + bX - aX - b = aX^2 + (b-a)X - b$$
donc, par unicité de la forme développée,
$$P = (X-1)(aX+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \\ b - a = 2m \\ -b = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \\ b = 3m - 1 \end{cases}$$
donc $P = (X-1)\left[(m-1)X + 3m - 1\right]$.

**Exercice 18.** On considère le polynôme $P = 2X^4 - 9X^3 + 14X^2 - 9X + 2$.

1. **a.** Le nombre 0 est-il racine de $P$ ?

   **b.** Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que si $r$ est une racine de $P$ alors $\frac{1}{r}$ est également une racine de $P$.

2. **a.** Montrer que l'équation $P(x) = 0$ est équivalente à l'équation
$$(E) : 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

   **b.** On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Déduire de la question précédente que $(E)$ est équivalente à
$$(E') : 2u^2 - 9u + 10 = 0.$$

   **c.** Résoudre $(E')$ et en déduire les solutions de $(E)$.

   **d.** Factoriser $P$.

**Solution.**

1. **a.** $P(0) = 2 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $P$.

   **b.** Supposons que $r$ et un racine de $P$. Alors,
$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{r}\right) &= 2\left(\frac{1}{r}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{r}\right)^3 + 14\left(\frac{1}{r}\right)^2 - 9\left(\frac{1}{r}\right) + 2 = \\ &= \frac{2}{r^4} - \frac{9}{r^3} + \frac{14}{r^2} - \frac{9}{r} + 2 \\ &= \frac{2 - 9r + 14r^2 - 9r^3 + 2r^4}{r^4} = \frac{P(r)}{r^4} = 0 \end{aligned}$$
donc $\frac{1}{r}$ est racine de $P$.

**2. a.** Pour tout $x \neq 0$,

$$(E) \iff 2x^2 + \frac{2}{x^2} - 9x - \frac{9}{x} + 14 = 0 \iff \frac{2x^4 + 2 - 9x^3 - 9x + 14x^2}{x^2} = 0$$
$$\iff \frac{2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2}{x^2} = 0 \iff \frac{P(x)}{x^2} = 0$$

Comme 0 n'est pas solution de $P(x) = 0$, on en déduit que $(E)$ équivaut à $P(0) = 0$.

**b.** On remarque que $u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ donc, pour tout réel $x$ non nul,

$$(E) \Leftrightarrow 2(u^2 - 2) - 9u + 14 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 - 9u + 10 = 0.$$

Ainsi, $(E)$ est bien équivalente à $(E')$.

**c.** Le discriminant de $2X^2 - 9X + 10$ est $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède 2 racines réelles :

$$x_1 = -\frac{-(-9) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_1 = -\frac{-(-9) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{5}{2}.$$

On en déduit que, pour tout réel $x$ non nul,

$$(E) \iff x + \frac{1}{x} = 2 \text{ ou } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \iff x^2 + 1 = 2x \text{ ou } 2(x^2 + 1) = 5x$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Or, $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ donc ce trinôme possède 1 comme racine multiple.
Par ailleurs, le discriminant de $2X^2 - 5X + 2$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = -\frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_1 = -\frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 2.$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions de $(E)$ est $\{1\,; \frac{1}{2}\,; 2\}$.

**d.** On sait que 1 est racine double de $P$ et que $\frac{1}{2}$ et 2 sont racines simples de $P$. On déduit que $P = 2(X - 1)^2(x - \frac{1}{2})(X - 2)$.

**Exercice 19.**

**1.** Déterminer deux fonctions $f$ et $g$ non nulles telles que $fg$ soit la fonction nulle.

**2.** Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $PQ$ est le polynôme nul si et seulement si $P$ ou $Q$ est nul.

**Solution.**

**1.** Prenons pour $f$ la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et pour $g$ la fonction indicatrice de $\{0\}$ c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Comme $f(1) = 1$ et $g(0) = 1$, $f$ et $g$ ne sont pas la fonction nulle. De plus, pour tout réel $x$, si $x = 0$ alors $f(x) = 0$ donc $f(x)g(x) = 0$ et, si $x \neq 0$ alors $g(x) = 0$ donc $f(x)g(x) = 0$. Ainsi, $fg$ est la fonction nulle.

**2.** Soit $P$ et $Q$ deux polynômes. Il est clair que si $P$ ou $Q$ est nul alors $PQ$ est également nul. Inversement, supposons que $PQ = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $P$ et $Q$ sont non nuls. Alors, $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ sont des entiers naturels donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \in \mathbb{N}$. Or, $\deg(PQ) = \deg(0) = -\infty$ donc on aboutit à une contradiction. Ainsi, $P$ ou $Q$ est nul.
On a donc bien montré que $PQ$ est nul si et seulement si $P$ ou $Q$ est nul.