♦ Corrigés des exercices du chapitre 12

Exercice 1. Dans chacun des cas suivantes, calculer $A+B$ et AB lorsque ces opérations ont un sens.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 1+\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

Solution.

1. Les matrices A et B sont de même taille donc on peut les additionner et $A+B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. En revanche, A possède 3 colonnes et B possède 2 lignes donc on ne peut pas calculer AB.

2. Comme A et B n'ont pas la même taille, on ne peut pas les additionner. En revanche, B possède autant de ligne que A a de colonne donc on peut les multiplier et $AB = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -18 & 14 \end{pmatrix}$.

3. Comme A et B sont des matrices carrées d'ordre 3, on peut les additionner et les multiplier entre elles et on trouve $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 \\ -4 & 23 & 10 \\ 4 & 6 & 36 \end{pmatrix}$.

4. De même, on peut calculer $A+B$ et AB et on obtient $A+B = \begin{pmatrix} 3 & \mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

$$(E_1)\ 2X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (E_2)\ 5X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

- $(E_1) \iff 2X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff 2X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

- $(E_2) \iff 5X - 2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff 3X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

$$(E_1)\ 2A = I_2 \qquad (E_2)\ A + {}^tA = I_2 \qquad (E_3)\ A - {}^tA = I_2.$$

Solution.

- $(E_1) \iff A = \frac{1}{2}I_2$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{1}{2}I_2\right\}$.

  Pour la résolution des 2 autres équations, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d des nombres complexes.

- $(E_2) \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b + c = 0 \end{cases}$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ -b & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{C} \right\}$.

- $(E_3) \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 1 \\ b - c = 0 \end{cases}$.
  Le système obtenu est incompatible dons l'ensemble des solutions de (E_3) est $\varnothing$.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Solution.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.
2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ ».

   Initialisation. $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3^0 - 1 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors,

   $$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3(3^n - 1) \\ 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

   donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Pour chacune des propositions suivantes, déterminer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

1. Soit A et B deux matrices non nulles telles que B a autant de lignes de A a de colonnes. Alors, la matrice AB n'est pas nulle.

2. Soit A et B deux matrices non nulles telles que B a autant de lignes de A a de colonnes. Alors, la matrice $AB \neq BA$.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe un entier k tel que $A^k = 0n$ alors $A = 0_n$.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Il existe une suite géométrique (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n - 1 & u_n \end{pmatrix}$.

Solution.

1. La proposition est **fausse**. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A \neq 0_2$, $B \neq 0_2$ mais $AB = 0_2$.

2. La proposition est **fausse**. Avec les mêmes matrices que précédemment, $AB = BA = 0_2$.

3. La proposition est **fausse**. Si on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = 0_2$ mais $A \neq 0_2$.

4. La proposition est **vraie**. Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n - 1 & u_n \end{pmatrix}$ où (u_n) est la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 4^n$.
On raisonne par récurrence.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^0 - 1 & 4^0 \end{pmatrix} = I_2 = A^0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}$ donc

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 \times 4^n - 1 & 4 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^{n+1} - 1 & 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}$.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conjecturer une expression de A^{2n+1} en fonction de n.

3. Démontrer par récurrence cette conjecture.

Solution.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A$.

2. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n+1} = A$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $A^{2n+1} = A$ ».
Initialisation. Comme $A^{2\times 0+1} = A^1 = A$, la proposition $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie.
Alors, $A^{2(n+1)+1} = A^{2n+3} = A^{2n+1} \times A^2 = A \times A^2 = A^3 = A$ donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n+1} = A$.

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout réel x, on pose

$$M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \geqslant 3$.

2. Soit x et y deux nombres réels. Montrer que

$$M(x)M(y) = M(x+y).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $M(x)^n = M(nx)$.

4. Calculer $M(0)$ et $M(1)$.

5. Calculer $M(1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A^3 = 0_3$. On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $A^n = A^3 A^{n-3} = 0_3 A^{n-3} = 0_3$.

2. On a, en utilisant que, pour tout matrice M carrée d'ordre 3, $I_3 M = M I_3 = M$ ainsi que les propriétés du calcul matriciel,

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \left(I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right) \\ &= I_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{xy^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{x^2y}{2}A^3 + \frac{x^2y^2}{3}A^4 \end{aligned}$$

donc, comme $A^3 = A^4 = 0_3$,

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= I_3 + (x+y)A + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right)A^2 \\ &= I_3 + (x+y)A + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}A^2 \\ &= I_3 + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

3. On raisonne par récurrence. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $M(x)^n = M(nx)$ ».
Initialisation. Pour $n = 0$, $M(x)^0 = I_3$ et $M(0x) = M(0) = I_3$ donc $P(0$ est vraie.
Hérédté. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, $M(x)^n = M(nx)$ donc, grâce à la question 2.,

$$M((n+1)x) = M(nx + x) = M(nx)M(x) = M(x)^n M(x) = M(x)^{n+1}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(x)^n = M(nx)$.

4. On a $M(0) = I_3$ et $M(1) = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. D'après la question 3., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(1)^n = M(n) = I_3 + nA + \frac{n^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $B = I_3 + J$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $J^n = 0_3$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $B^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de B^n en fonction de n.

Solution.

1. On a $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + I_3$ donc $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On vérifie à l'aide de la calculatrice que $J^3 = 0_3$. Dès lors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $J^n = J^3 J^{n-3} = 0_3 J^{n-3} = 0_3$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $B^n = I_3 + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}J^2$ ».

Initialisation. Comme $B^0 = I_3$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors,

$$B^{n+1} = B^n B = \left(I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\right)(I_3+J) = I_3+J+kJ+kJ^2+\frac{n(n-1)}{2}J^2+\frac{n(n-1)}{2}J^3$$

donc, comme $J^3 = 0_3$,

$$B^{n+1} = I_3+(n+1)J+\frac{2n+n(n-1)}{2}J^2 = I_3+(n+1)J+\frac{n(n-1+2)}{2}J^2 = I_3+(n+1)J+\frac{n(n+1)}{2}J^2$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n - \dfrac{n(n-1)}{2} & 1-2n & -n \\ -n + n(n-1) & 4n & 2n+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3n-n^2}{2} & 1-2n & -n \\ n^2-2n & 4n & 2n+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n et en déduire l'expressions de A^n.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ »

Initialisation. Comme $A^0 = I_3$, $P(0)$ est vraie en prenant $a_0 = b_0 = 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors,

$$A^{n+1} A^n A = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & a_n+b_n \\ 0 & 1 & 1+a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie en posant $a_{n+1} = a_n + 1$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où les suites (a_n) et (b_n) sont définies par $a_0 = b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 1$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

2. La suite (a_n) est arithmétique de raison 1 donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + n \times 1 = n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = n + b_n$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = n$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$. Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k$ est une somme téléscopique donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} - b_k = b_n - b_0$$

Comme $b_0 = 0$, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Remarquons que cette égalité est encore vraie pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, J^3 et J^4 puis émettre une conjecture sur l'expression de J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer cette conjecture par récurrence.

2. Exprimer A, A^2 et A^3 en fonction de I_2 et de J.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = I_2 + \frac{5^n-1}{2} J$.
Cette égalité est-elle encore vraie pour $n = 0$?

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

En utilisant des matrices, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions explicites de u_n et v_n en fonction de n.

Solution.

1. Étant donné que $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $J^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$, on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} J$.

Démontrons-le par récurrence. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $J^n = 2^{n-1} J$ ».

Initialisation. $2^{1-1} J = 2^0 J = J = J^1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $J^n = 2^{n-1} J$.

Alors, en utilisant le fait, vu ci-dessus, que $J^2 = 2J$, on obtient

$$J^{n+1} = J^n J = 2^{n-1} J^2 = 2^{n-1} \times 2J = 2^n J$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 2^{n-1} J$.

2. On constate que $A = I + 2J$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = I_2 + 12J$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 63 & 62 \\ 62 & 63 \end{pmatrix} = I_2 + 62J$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $A^n = I_2 + \dfrac{5^n - 1}{2} J$ ».

Initialisation. Étant donné que $I_2 + \dfrac{5^1 - 1}{2} J = I + 2J = A$, la proposition $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ vraie.

Alors, étant donné que $I_2^2 = I_2$ et $I_2 J = J I_2 = J$ et $J^2 = 2J$,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n A = \left(I_2 + \frac{5^n - 1}{2} J\right)(I + 2J) &= I_2^2 + 2I_2 J + \frac{5^n - 1}{2} J I_2 + (5^n - 1)J^2 \\
&= I_2 + \left(2 + \frac{5^n - 1}{2} + 2(5^n - 1)\right) J \\
&= I_2 + \frac{4 + 5^n - 1 + 4(5^n - 1)}{2} J \\
&= I_2 + \frac{5 \times 5^n - 1}{2} J \\
&= I_2 + \frac{5^{n+1} - 1}{2} J
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ A^n = I_2 + \frac{5^n - 1}{2} J.$$

4. Les relations vérifiées par les suites (u_n) et (v_n) se traduisent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

et, si on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, l'écriture matricielle de ce système est $X_{n+1} = AX_n$.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».
Initialisation. Comme $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$, $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie.
Alors, $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$ donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
Grâce à la question 3, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \left(1 + \frac{5^n - 1}{2}\right) \times 2 + \frac{5^n - 1}{2} \times 3 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{5^n - 1}{2} \times 2 + \left(1 + \frac{5^n - 1}{2}\right) \times 3$$

c'est-à-dire

$${}_n = \frac{5^{n+1} - 1}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{5^{n+1} + 1}{2}.$$

Exercice 11. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont inversibles et déterminer A^{-1} et B^{-1}.

2. Sans la calculer, en déduire que AB est inversible et déterminer son inverse.

Solution.

1. Comme $\det(A) = 4 \times 2 - (-1) \times 1 = 9 \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

De même, $\det(B) = 5 \times 2 - 0 \times 2 = 10 \neq 0$, B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. Comme A et B sont inversibles, par propriété, AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Pour tout réel x, on pose $R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.

1. Identifier la matrice $R(0)$ et montrer que, pour tous réels x et y, $R(x)R(y) = R(x+y)$.

2. Déduire de la question précédente que :

a. pour tous réels x et y, $R(x)$ et $R(y)$ commutent ;

b. pour tout réel x, $R(x)$ est inversible et il existe un réel y tel que $R(x)^{-1} = R(y)$.

Solution.

1. Par définition, $R(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Soit x et y deux réels. Alors,

$$\begin{aligned} R(x)R(y) &= \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & -(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) & \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc, d'après les formules d'addition, $R(x)R(y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = R(x+y)$.

2. a. Soit x et y deux réels. D'apfès la question 1., $R(x)R(y) = R(x+y) = R(y+x) = R(y)R(x)$ donc $R(x)$ et $R(y)$ commutent.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions **1.**, $R(x)R(-x) = R(x-x) = R(0) = I_2$ donc $R(x)$ est inversible et $R(x)^{-1} = R(-x)$.

Exercice 13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$ et en déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Solution. On a $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 12 & -9 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3A$ et ainsi $A^2 - 3A + I_3 = 0_3$.

On en déduit que $A^2 - 3A = -I_3$ donc $A(A - 3I_3) = -I_3$ donc $-A(A - 3I_3) = I_3$ i.e. $A(3I_3 - A) = I_3$. Ainsi, on en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = 3I_3 - A$.

Remarque. Attention, lorsqu'on factorise $A^2 - 3A$ à gauche par A, on obtient $A(A - 3I_n)$ et non pas $A(A - 3)$ qui n'a pas de sens car A est une matrice et 3 est un nombre donc, on ne peut pas soustraire 3 à A.

Exercice 14. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -15 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution.

- $\det(A) = 2 \times (-2) - (-5) \times 1 = 1 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- $\det(B) = 2 \times (-15) - (-6) \times 5 = -30 + 30 = 0$ donc B n'est pas inversible.
- La matrice C n'est pas carrée donc elle n'est pas inversible.
- $\det(D) = 1 \times 1 - \mathrm{i} \times \mathrm{i} = 2 \neq 0$ donc D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.
- On considère le système (S_E) : $\begin{cases} y - z = a & L_1 \\ x + 2y - z = b & L_2 \\ 3x + y + z = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_E) \iff \begin{cases} x + 2y - z = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \quad + y - z = a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 3x + y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ \quad y - z = a \\ -5y + 4z = -3b + c & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ \quad y - z = a \\ \quad -z = 5a - 3b + 1 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(E) = 3$ (puisqu'il y a 3 pivots) donc E est inversible.

$$(S_E) \iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ \quad y - z = a \\ \quad z = -5a + 3b - 1 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = b \\ \quad y \quad = -4a + 3b - c & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \quad z = -5a + 3b - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3a - 2b + c & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + L_3 \\ y = -4a + 3b - c \\ z = -5a + 3b - c \end{cases}$$

Ainsi, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- Considérons le système (S_F) : $\begin{cases} 2x+y3z=a & L_1 \\ x+3y-z=b & L_2 \\ 3x-y+7z=c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_F) \iff \begin{cases} x+3y-z=b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x+y+3z=a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ 3x-y+7z=c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y-z=b \\ -5y+5z=a-2b & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -10y+10z=-3b+c & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y-z=b \\ -5y+5z=a-2b \\ 0=-2x+b+c & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{rg}(F)=2$ (puisqu'il y a 2 pivots) donc F n'est pas inversible.

- Considérons le système (S_G) : $\begin{cases} x+y+z=a & L_1 \\ -y \quad =b & L_2 \\ -2y-z=c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_G) \iff \begin{cases} x+y+z=a \\ y \quad =-b & L_2 \leftarrow -L_2 \\ y+2z=2a+c & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a \\ y \quad =-b \\ 2z=2a+b+c & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{rg}(G)=3$ (puisqu'il y a 3 pivots) donc G est inversible.

$$(S_G) \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c & L_1 \leftarrow L_1-L_2-L_3 \\ y=-b \\ z=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \end{cases}$$

Ainsi, $G^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Considérons le système (S_G) : $\begin{cases} \phantom{x-{}} y - z = a & L_1 \\ x \phantom{{}-y} - z = b & L_2 \\ x - y + z = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_G) \iff \begin{cases} x \phantom{{}-y} - z = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \phantom{x-{}} y - z = a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ x - y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}-y} - z = b \\ \phantom{x-{}} y - z = a \\ -y + 2z = -b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}-y} - z = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \phantom{x-{}} y - z = a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ x - y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}-y} - z = b \\ \phantom{x-{}} y - z = a \\ \phantom{x-y-{}} z = a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{rg}(H) = 3$ (puisqu'il y a 3 pivots) donc H est inversible.

$$(S_G) \iff \begin{cases} x = a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ y = 2a - b + c & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ z = a - b + c \end{cases}$$

Ainsi, $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Considérons le système (S_J) : $\begin{cases} \phantom{x+{}} y + z = a & L_1 \\ x \phantom{{}+y} + z = b & L_2 \\ x + y \phantom{{}+z} = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_J) \iff \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \phantom{x+{}} y + z = a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ x + y \phantom{{}+z} = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = b \\ \phantom{x+{}} y + z = a \\ \phantom{x+{}} y - z = -b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = b \\ \phantom{x+{}} y + z = a \\ -2z = -a - b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\text{rg}(J) = 3$ (puisqu'il y a 3 pivots) donc J est inversible.

$$(S_J) \iff \begin{cases} x \quad + z = b \\ \quad y + z = a \\ \qquad z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c & L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Ainsi, $J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Considérons le système $(S_K) : \begin{cases} x + 2y + 3z = a & L_1 \\ -2x - 4y - 6z = b & L_2 \\ -x - 2y - 3z = c & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_K) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ \qquad 0 = 2a + b & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \qquad 0 = a + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(K) = 1$ (puisqu'il y a 1 seul pivot) donc K n'est pas inversible.

- Considérons le système $(S_L) : \begin{cases} y = a \\ z = b \\ t = d \\ x = d \end{cases}$. Alors,

$$(S_L) \iff \begin{cases} x = d & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ z = b & L_2 \\ t = d & L_3 \\ y = a & L_4 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = d & L_1 \\ y = a & L_2 \leftrightarrow L_4 \\ t = d & L_3 \\ z = b & L_4 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = d & L_1 \\ y = a & L_2 \\ z = b & L_3 \leftrightarrow L_4 \\ t = d & L_4 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

Ainsi, L est inversible et $L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^tL$.

- La matrice M est échelonnée avec 5 pivots donc $\mathrm{rg}(M) = 5$ et ainsi M est inversible.

Considérons le système (S_M) : $\begin{cases} x+y+z+t+u=a \\ y+z+t+u=b \\ z+t+u=c \\ t+u=d \\ u=e \end{cases}$. Alors,

$$(S_M) \iff \begin{cases} x = a-(b-c)-(c-d)-(d-e)-e = a-b \\ y = b-(c-d)-(d-e)-e = b-c \\ z = c-(d-e)-e = c-d \\ t = d-e \\ u = e \end{cases}$$

Ainsi, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n.

Solution.

1. Comme $\det(P) = 1 \times 2 - (-1) \times (-1) = 1 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. L'idée est ici de remarquer que $A = PDP^{-1}$ équivaut à $D = P^{-1}AP$. En effet,
$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &\iff P^{-1}A = P^{-1}(PDP^{-1}) \iff P^{-1}A = (P^{-1}P)DP^{-1} \\ &\iff P^{-1}A = I_2DP^{-1} \iff P^{-1}A = DP^{-1} \\ &\iff P^{-1}AP = (DP^{-1})P \iff P^{-1}AP = D(P^{-1}P) \\ &\iff P^{-1}AP = DI_2 \iff P^{-1}AP = D \end{aligned}$$
Or, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation. Comme $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n = A^0$, la proposition $H(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Alors,
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$
Ainsi, $H(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^{n+1} \\ -2^n & 2(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ -2^{n+1} + 2(-1)^n & -2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2(-1)^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}5b_n \\ b_{n+1} = -0{,}5a_n + 1{,}3b_n \end{cases}$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que $X_1 = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer la matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}

b. Calculer PTP^{-1}.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 0{,}8^{n-1} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5n \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

a. En utilisant les résultats précédents, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = 0{,}8^{n-1} \begin{pmatrix} 0{,}8 + 0{,}5n \\ 1{,}6 + 0{,}5n \end{pmatrix}.$$

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n.

Solution.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Par définition, $a_1 = 0{,}3 \times 1 + 0{,}5 \times 2 = 1{,}3$ et $b_1 = -0{,}5 \times 1 + 1{,}3 \times 2 = 2{,}1$ donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3a_n + 0{,}5b_n \\ -0{,}5a_n + 1{,}3b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$.

2. **a.** Comme $\det P = 1\times 1 - 0\times 1 = 1 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. On vérifie que $PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}3 \end{pmatrix}$ donc $PTP^{-1} = A$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H(n)$: « $A^n = PT^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Comme $A^0 = I_2$ et $PT^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, $H(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $H(n)$ est vraie. Alors, grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} \\ &= PT^nI_2TP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $G(n)$: « $T^n = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5n \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. Comme $T^0 = I_2$ et $0{,}8^{0-1}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5\times 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}8}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} = I_2$, $G(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $G(n)$ est vraie.

Alors,

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^nT &= 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5n \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ &= 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8^2 & 0{,}8\times 0{,}5 + 0{,}5n\times 0{,}8 \\ 0 & 0{,}8^2 \end{pmatrix} \\ &= 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8^2 & 0{,}8(0{,}5+0{,}5n) \\ 0 & 0{,}8^2 \end{pmatrix} \\ &= 0{,}8^{n}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5(n+1) \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $G(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5n \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

4. **a.** On déduit des résultats précédents que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^nX_0 = (PT^nP^{-1})X_0 = PT^n(P^{-1}X_0).$$

Or, $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n(P^{-1}X_0) = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5n \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix} 0{,}8+0{,}5n \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}PT^nP^{-1}X_0 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \times 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix}0{,}8+0{,}5n\\ 0{,}8\end{pmatrix} = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}8+0{,}5n\\ 0{,}8\end{pmatrix}\\ &= 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix}0{,}8+0{,}5n\\ 0{,}8+0{,}8+0{,}5n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $X_n = 0{,}8^{n-1}\begin{pmatrix}0{,}8+0{,}5n\\ 1{,}6+0{,}5n\end{pmatrix}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0{,}8^{n-1}(0{,}8+0{,}5n)$ c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0{,}8^n + 0{,}5n0{,}8^{n-1}$.

Exercice 17. Résoudre les systèmes suivants en utilisant les matrices.

$$(S_1)\ \begin{cases}4x+2y=1\\ -2x+y=-2\end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases}-3x+5y=-2\\ -x+\frac{1}{2}y=-3\end{cases}$$

Solution.

1. L'écriture matricielle de (S_1) est $AX=B$ avec $A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

Or, $\det(A) = 4\times 1 - (-2)\times 2 = 8 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. On en déduit que

$$(S_1) \iff AX = B \iff X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix}\frac{5}{8}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution de (S_1) est $\left(\frac{5}{8}\,;-\frac{3}{4}\right)$.

2. L'écriture matricielle de (S_2) est $AX=B$ avec $A = \begin{pmatrix}-3 & 5\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}-2\\ -3\end{pmatrix}$.

Or, $\det(A) = -3\times\dfrac{1}{2} - (-1)\times 5 = \dfrac{7}{2} \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{2}{7}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

On en déduit que On vérifie que la matrice A est inversible donc

$$(S_2) \iff AX = B \iff X = A^{-1}B \iff X = \begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution de (S_2) est $(4\,;2)$.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^tUU = 1$. On pose $S = I_n - 2U{}^tU$.

1. Montrer que ${}^tS = S$.

2. Calculer S^2. En déduire que S est inversible et exprimer S^{-1} en fonction de S.

Solution.

1. Par propriété de la transposition,

$${}^tS = {}^t(I_n - 2U^t) = {}^tI_n - 2^t(U^tU) = I_n - 2^t({}^tU)^tU = I_n - 2U^tU = S.$$

2. Sachant que $U^\top U = 1$,

$$\begin{aligned} S^2 &= (I_n - 2U^tU)(I_n - 2U^tU) = I_n^2 - 2U^tU - 2U^tU + 4(^tU)(U^tU) \\ &= I_n - 4U^tU + 4U(^tUU)^tU = I_n - 4U^tU + 4U^tU = I_n \end{aligned}$$

donc S est inversible et $S^{-1} = S$.

Exercice 19. Dans toute la suite, M désigne la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. **a.** Calculer $M^2 - 3M$ et exprimer cette matrice à l'aide de I_3.

b. En déduire que la matrice M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I_3.

c. En utilisant les matrices, résoudre le système (S) $\begin{cases} 5x + 6y = 9z + 4 \\ 2x + y = 3z \\ x + y = 2z + 1 \end{cases}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n M + b_n I_3$. On précisera a_0 et b_0 et on montrera que (a_n) et (b_n) vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 4a_n \end{cases}.$$

b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3. **a.** Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Calculer $P^{-1}AP$. On note D cette matrice.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

4. **a.** Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

b. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 6v_n - 9w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 2v_n - 4w_n \end{cases}.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les formes explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Solution.

1. **a.** On vérifie que $M^2 - 3M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $M^2 - 3M = 4I_3$.

b. On en déduit que $M(M - 3I_3) = 4I_3$ et donc $M \times \frac{1}{4}(M - 3I_3) = I_3$. Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{4}(M - 3I_3)$.

c. Remarquons que

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6y-9z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6y-9z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ 2x+2y-4z=2 \end{cases}.$$

L'écriture matricielle de ce dernier système équivalent à (S) est $MX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dès lors, comme M est inversible, (S) équivaut à $X = M^{-1}B = \frac{1}{4}(M - 3I_3)B$. On en déduit que (S) équivaut à $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'unique solution de (S) est $\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.

2. a. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI_3$ ».

Initialisation. Étant donné que $M^0 = I_3 = 0 \times M + 1 \times I_3$, $P(0)$ est vraie en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI_3$.

En utilisant la question **1.a.**,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (a_nM + b_nI_3)M = a_nM^2 + b_nM \\ &= a_n(3M + 4I_3) + b_nM = (3a_k + b_k)M + 4a_nI_3 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie en posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 4a_n$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_nM + b_nI_3$. De plus, ces deux suites sont définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 4a_n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ 4a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3. a. Le déterminant de P est $\det P = 1 \times 4 - (-1) \times 1 = 5 \neq 0$ donc P est inversible. De plus, $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. On vérifie que $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $Q(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Étant donné que $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $Q(n)$ est vraie c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$. Remarquons que, d'après **3.c.**, $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $Q(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \times 4^n & 4^n \\ -(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc, en raisonnant comme dans la question 4. de l'exercice 10, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$. Or, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4^{n+1} + (-1)^n & 4^n - (-1)^n \\ 4^{n+1} - 4 \times (-1)^n & 4^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^n-(-1)^n}{5} \\ \frac{4^n+4\times(-1)^n}{5} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{4^n-(-1)^n}{5}$ et $b_n = \frac{4^n+4\times(-1)^n}{5}$.

4. a. On déduit des questions **2.a.** et **4.a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{4^n-(-1)^n}{5}M + \frac{4^n+4\times(-1)^n}{5}I_3$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n & 6(4^n - (-1)^n) & -9(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2 \times 4^n + 3 \times (-1)^n & -3(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) & 2(4^n - (-1)^n) & -3 \times 4^n + 8 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors, $Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, d'après les relations de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. On en déduit comme précédemment que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^nZ_0$ et donc, d'après la question **4.a.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \times 4^n - (-1)^n \\ 2(4^n - (-1)^n) \\ 2(4^n - (-1)^n) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{6 \times 4^n - (-1)^n}{5},\ v_n = w_n = \frac{2(4^n - (-1)^n)}{5}.$$

Exercice 20. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $I_n - AB)$ est inversible.
Calculer $(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)$. Que peut-on en conclure ?

Solution. En développant :

$$(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = I_n^2 + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - BAB(I_n - AB)^{-1}A.$$

Or, pa définition,

$$I_n = (I_n - AB)(I_n - AB)^{-1} = I_n(I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1} = (I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}$$

donc $AB(I_n - AB)^{-1} = (I_n - AB)^{-1} - I_n$. En substituant dans la première égalité, on obtient

$$\begin{aligned}(I_n - BA)(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) &= I_n + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - B\left[(I_n - AB)^{-1} - I_n\right]A \\ &= I_n + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - B(I_n - AB)^{-1}A + BA \\ &= I_n.\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n - BA$ est inversible et que $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_b - AB)^{-1}A$.

Exercice 21. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente c'est-à-dire une matrice telle qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $N^p = 0_n$.

1. La matrice N est-elle inversible ?
2. En considérant $(I_n - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k$, montrer que $I_n - N$ est inversible.

Solution.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que N est inversible. Alors, par théorème, N^p aussi. Or, 0_n n'est pas inversible donc on aboutit à une contradiction. Ainsi, N n'est pas inversible.
2. On remarque que

$$(I_n - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k = I_n\sum_{k=0}^{p-1} N^k - N\sum_{k=0}^{p-1} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} N^k - \sum_{k=0}^{p-1} N^{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k - N^{k+1}.$$

On reconnait une somme téléscopique donc

$$(I_n - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k = N^0 - N^p = I_n$$

car $N^0 = I_n$ et $N^p = 0_n$. Ainsi, $I_n - N$ est inversible et $(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D une matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont distincts.

Quelles sont les matrices qui commutent avec D ?

Solution. Notons d_{ij} le terme d'indices i et j de la matrice D pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Comme D est diagonale, par définition, pour tout $i \neq j$, $d_{ij} = 0$.

Une condition nécessaire pour qu'une matrice commute avec D est qu'elle soit carrée d'ordre n. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n qui commute avec D. Le terme d'indice i et j de DM est $\sum_{k=1}^{n} d_{ik}m_{kj} = d_{ii}m_{ij}$ (puisque $d_{ik} = 0$ si $k \neq i$) et le terme d'indice i et j de MD est $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}d_{kj} = m_{ij}d_{jj}$ (puisque $d_{kj} = 0$ si $k \neq j$). Comme D et M commutent, $DM = MD$ et donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ii}m_{ij} = m_{ij}d_{jj}$ c'est-à-dire $m_{ij}(d_{ii} - d_{jj}) = 0$.

Or, par hypothèse, les termes diagonaux de D sont tous distincts donc si $i \neq j$, $d_{ii} - d_{jj} \neq 0$ et donc $m_{ij} = 0$. Ainsi, M est diagonale.

Réciproquement, si M est diagonale alors on vérifie sans peine que MD et DM sont aussi diagonales et que pour ces deux matrices le terme d'indices i et i est $m_{ii}d_{ii}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc $MD = DM$.

Ainsi, les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales d'ordre n.