♦ Corrigés des exercices du chapitre 11

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2023}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2023}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5x-3$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x+1$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4-x+2$ 7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+1$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{1+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

Solution.

1) $\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2=1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2}=1$.

2) Par théorème, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2023}=+\infty$.

3) Comme 2023 est impair, par théorème, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2023}=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x-3=+\infty$ (car $5>0$) donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5x-3=+\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+1=+\infty$ (car $-1<0$) donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x+1=+\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4=+\infty$ (car $3>0$ et 4 est pair) et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+2=+\infty$ (car $-1<0$) donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4-x+2=+\infty$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ (car 3 est impair) et $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2+1=-\infty$ (car $-1<0$) donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+1=-\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x=+\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x}=0$ et, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{1+x}=+\infty$.

9) Comme 2 est pair, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}=+\infty$ donc, par différence, $\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{x^2}=-\infty$.

10) $\lim\limits_{x\to-3} \sqrt{x+3}=0^+$d donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=+\infty$.

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}=+\infty$.

12) $\lim\limits_{x\to 2} x-3=-1$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 2}=-\infty$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^3)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ 7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)}$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\mathrm{e}^{-x}$ 10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$

Solution.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$ donc, par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln(x)=+\infty$.

3) D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$. D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$. Par somme, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=+\infty$.

4) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-3x}=\frac{1}{\mathrm{e}^{3x}}=\frac{1}{(\mathrm{e}^x)^3}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x)^3=+\infty$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x}=0$.

5) Pour tout $x>0$, $\ln(x^3=3\ln(x))$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^3)=-\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

7) D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc, par somme, $\lim \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^x = 1$. D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et, par somme , $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Finalement, par quotient, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 0$.

8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$.

9) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$ et donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

10) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = +\infty$.

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et donner, lorsque cela est possible, une interprétation graphique de cette limite.

1) $f(x) = x + \mathrm{e}^x$; $a = +\infty$	2) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$; $a = +\infty$	3) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$; $a = +\infty$
4) $f(x) = \ln(x) + x$; $a = 0^+$	5) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; $a = -\infty$	6) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$; $a = 0^+$
7) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $a = +\infty$	8) $f(x) = x^2 - x$; $a = -\infty$	9) $f(x) = \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$; $a = +\infty$
10) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$; $a = +\infty$	11) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; $a = -\infty$	12) $f(x) = \ln(x) - \mathrm{e}^x$; $a = 0^+$

Solution.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Pour tout réel x_neq0, $f(x) = \dfrac{x}{x(2-\frac{1}{x})} = \frac{1}{2-\frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

3) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Par différence, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

7) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$. Or, Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$. Par quotient, en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$.

10) Pour tout réel x, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x})} = \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et ainsi, par somme et quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

11) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

12) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ donc, différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{3-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$, de $-\infty$ et de 3.
2. Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f puis retrouver ce résultat déterminant la forme réduite de f.

Solution.

1. <u>Étude au voisinage de $+\infty$</u> Pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(\frac{3}{x}-1)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc, par produit, somme et quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

   <u>Etude au voisinage de $-\infty$.</u> — De la même façon, pour tout $x<0$, $f(x)=\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(\frac{3}{x}-1)}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ donc, par produit, somme et quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.
   <u>Etude au voisinage de 3.</u> — On a, d'une part, $\lim\limits_{x\to3}2x+1=7$ et, d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}3-x=0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}3-x=0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}f(x)=-\infty$.
2. On déduit de ce qui précède que la droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et que la droite d'équation $x=3$ est asymptote verticale à la courbe de f.
   Pour tout réel x,
   $$f(x)=\frac{-2(3-x)+7}{3-x}=\frac{-2(3-x)}{3-x}+\frac{7}{3-x}=-2+\frac{-7}{x-3}$$
   donc, on retrouve que la droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ et que la droite d'équation $x=3$ est asymptote verticale à la courbe de f.

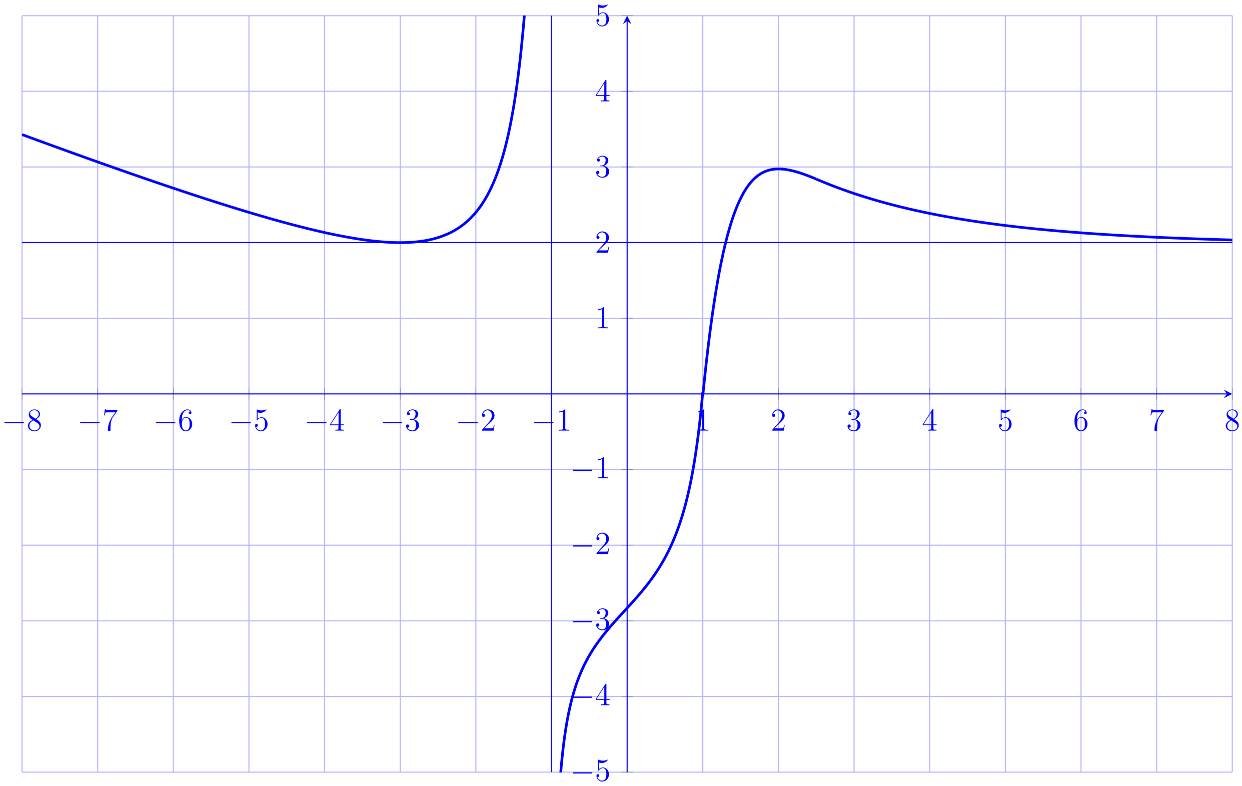
Exercice 5. On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	2 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	3 ↘	2

1. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f. (On fera également apparaître les éventuelles asymptotes.)
2. Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
   a. Quel est l'ensemble de définition de g ?
   b. Déterminer, en justifiant, les limites de g aux bornes de son ensemble de définition (éventuellement à droite et à gauche).

Solution

1. Voici une courbe susceptible de représenter f avec l'asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$ et l'asymptote vertical d'équation $x=-1$.



2. **a.** $g(x)$ existe si et seulement si $f(x)$ existe et est différent de zéro. Ainsi, l'ensemble de définition de g est $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = 0$. Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to-1} g(x) = 0$.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0^-$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f(x) = -3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$, $I = R$.

3. $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$, $I =]0\,;+\infty[$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$, $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$.

5. $f(x) = \sqrt{2x + 4}$, $I =]-2\,;+\infty[$.

Solution.

1. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -3$.

2. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2x - 2$.

3. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{-4}{(1-4x)^2} = \dfrac{4}{(1-4x)^2}$.

5. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

Exercice 7. Dans chacun des cas, calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble précisé. On ne demande pas justifier la dérivabilité. Dans 7), a, b, c et d sont des réels tels que $c \neq 0$.

1) $f(x) = x^{2023}$; $\mathbb{R}$	3) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $\mathbb{R}$	3) $f(x) = \dfrac{x^4}{4}$; $\mathbb{R}$
4) $f(x) = \ln(x) + 2\sqrt{x}$; $\mathbb{R}_+^*$	5) $f(x) = x^2 e^x$; $\mathbb{R}$	6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x-2}$; $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$
7) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$	8) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $\mathbb{R}_+^*$	9) $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$; $\mathbb{R}^*$
10) $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+x}$; $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	11) $f(x) = e^{-5x}$; $\mathbb{R}$	12) $f(x) = \sin(5x+1)$; $\mathbb{R}$
12) $f(x) = \ln(3x+6)$; $]-2\,;+\infty[$	14) $f(x) = (\sin(x))^2$; $\mathbb{R}$	15) $f(x) = (\cos^2(x)+1)^3$; $\mathbb{R}$

Solution.
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2023x^{2022}$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 5$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3$.
4) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = d\frac{1}{x} + 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{x}{+}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$.
5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = x(x+2)e^x$.
6) Pour tout réel $x \neq \frac{2}{5}$,

$$f'(x) = \frac{3(5x-2) - (3x+1) \times 5}{(5x-2)^2} = \frac{15x - 6 - 15x - 5}{(5x-2)^2} = \frac{-11}{(5x-2)^2}.$$

7) Pour tout réel $x \neq -\frac{d}{c}$,

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - (ax+b) \times c}{(cx+d)^2} = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

8) Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

9) Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3} \times (-\frac{-3}{x^4}) = -\frac{1}{x^4}$.
10) Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{(1 \times e^x + xe^x)(1+x) - xe^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x(1+x)^2 - xe^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x(1 + 2x + x^2 - x)}{(1+x)^2} = \frac{e^x(x^2+x+1)}{(1+x)^2}.$$

11) Pour tout réel x, $f'(x) = -5e^{-5x}$.
12) Pour tout réel x, $f'(x) = 5\cos(5x+1)$.
13) Pour tout réel $x > -2$, $f'(x) = \frac{3}{3x+6} = \frac{1}{x+2}$.
14) Pour tout réel x, $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x)$.
15) Pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times 2(-\sin(x)\cos(x))(\cos^2(x)+1)^2 = -3\sin(2x)(\cos^2(x)+1)^2$.

Exercice 8. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 3x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variations de f.

3. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$. Admet-elle des extremums locaux ?

Solution.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ donc, produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout réel $x < 0$, $f(x) = x^3(1 + \frac{3}{x}) - 2$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(1 + \frac{3}{x}) = -\infty$. Par somme, on conlut que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. Ainsi, f' est une fonction trinôme du second degré dont les racines sont 0 et -2 (d'après la forme factorisée précédente). Comme $a = 3 > 0$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, f n'est pas minorée donc elle n'est pas bornée. En revanche, f admet un minimum local égal à -2 atteint en 0 et un maximum local égal à 2 atteint en -2.

Exercice 9. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+8}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}.$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Quels sont les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$?

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Étudier les positions relatives de T et de $\mathcal{C}_f$.

Solution.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables (et la fonction $x \longmapsto x^2 + 8$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+8) - (x+1) \times (2x)}{(x^2+8)^2} = \frac{x^2 + 8 - 2x^2 - 2x}{(x^2+8)^2}$$

et donc $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}$.

2. Pour tout réel x, $(x^2+8)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x^2-2x+8$. Le discriminant de ce trinôme est $(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36 > 0$ donc l'équation $-x^2-2x+8=0$ possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \frac{2-6}{-2} = 2$ et $x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \frac{2+6}{-2} = -4$. Comme $a = -1 < 0$, on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;-4] \cup [2\,;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [-4\,;2]$.
   Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty\,;-4]$, croissante sur $[-4\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
3. On déduit de la question précédente que f admet un minimum local en -4 qui vaut $f(-4) = -\frac{1}{8}$ et un maximum local en 2 qui vaut $f(2) = \frac{1}{4}$.
4. On a $f'(0) = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$ et $f(0) = \frac{1}{8}$ donc $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{8}(x-0) + \dfrac{1}{8}$ donc $T : y = \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{8}$.
5. Posons, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - \frac{x+1}{8}$. Alors, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+8} - \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\right) = \frac{8(x+1)-(x+1)(x^2+8)}{8(x^2+8)}$$
$$= \frac{(x+1)[8-(x^2+8)]}{8(x^2+8)} = -\frac{x^2(x+1)}{8(x^2+8)}.$$

   Comme $x^2 \geqslant 0$ et $8(x^2+8) > 0$, le signe de $d(x)$ est le signe de $-(x+1)$. Ainsi, $d(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $d(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$.
   On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus (au sens large) de T sur $]-\infty\,;-1]$ et en dessous (au sens large) de T sur $[-1\,;+\infty[$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que f est définie sur $\mathbb{R}$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction exponentielle définie et non nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \longmapsto x-1$ et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{e}^x - (x-1)\times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x(2-x)}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

3. Comme la fonction exp est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $2-x$. On en déduit que $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty\,;2]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [2\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;2]$ et f est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $e^{2x} = (e^x)^2$. Or, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc, par produit, $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$. Dès lors, $\lim_{x\to-\infty} 2e^{2x} + 1 = 1$ et donc, par quotient, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.
2. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}\left(2 + \dfrac{1}{e^{2x}}\right)} = \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{(e^x)^2}}$. Or, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. Dès lors, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$ et ainsi, par somme et quotient, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}\left(2e^{2x}+1\right) - e^{2x} \times 4e^{2x}}{\left(2e^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{4e^{4x} + 2e^{2x} - 4e^{4x}}{\left(2e^{2x}+1\right)^2}$ c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(2e^{2x}+1\right)^2}$.
   Or, $e^{2x} > 0$ pour tout réel x, donc $f'(x) > 0$ et ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour tout réel x,
$$f(x) = \frac{(e^x - e^{-x})e^x}{(e^x + e^{-x})e^x} = \frac{e^{x+x} - e^{-x+x}}{e^{x+x} + e^{-x+x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}.$$
   Or, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc, produit, somme et quotient, $\lim_{-\infty} f = -1$.
   Pour tout réel x,
$$f(x) = \frac{(e^x - e^{-x})e^{-x}}{(e^x + e^{-x})e^{-x}} = \frac{e^{x-x} - e^{-x-x}}{e^{x-x} + e^{-x-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - (\frac{1}{e^x})^2}{1 + (\frac{1}{e^x})^2}.$$
   Or, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et ainsi, par produit, somme et quotient, $\lim_{-\infty} f = 1$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée, somme, différence et quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{[(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})][(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{2e^x \times 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 12$.

a. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ en fonction de x et présenter les résultats sous forme d'un tableau.

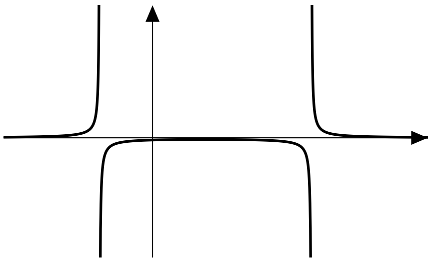
b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

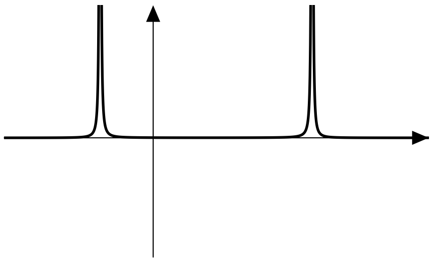
a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

b. Déterminer les limites de h (éventuellement à droite et à gauche) aux bornes de cet ensemble de définition puis donner une interprétation graphique de ces limites.

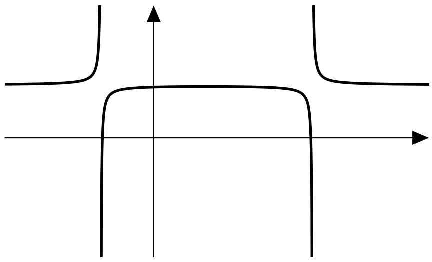
c. On a représenté ci-dessous l'allure de trois courbes. L'une d'entre elles peut-elle correspondre à la courbe de h ? On justifiera sa réponse en utilisant uniquement les résultats de la question précédente.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

3. On considère la fonction f définie sur $D =]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 20}{x - 2}$.

a. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

b. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ où g est définie dans la question **1.**.

c. En déduire, pour tout $x \in D$, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D.

Solution.

1. a. Le discriminant de $g(x)$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64$ donc l'équation $g(x) = 0$ possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 1} = 6.$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. D'une part, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -4x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$. D'autre part, pour tout réel $x > 0$, $g(x) = x^2(1 - \frac{4}{x}) - 12$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par produit et somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc, par produit et somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. **a.** Pour tout réel x, $h(x)$ existe si et seulement si $g(x)$ existe et $g(x) \neq 0$. On déduit donc de la question **1.** que l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;6\}$.

b. Comme $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{-\infty} g = +\infty$, par quotient, $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{-\infty} h = 0$.

D'après le tableau de signe de la question **1.**, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} g(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} g(x) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} h(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x<6}} g(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x>6}} g(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x<6}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x>6}} h(x) = +\infty$.

On déduit des limites précédentes que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de h aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ et que les droites d'équations $x = -2$ et $x = 6$ sont asymptotes verticales à la courbe de h.

c. Comme l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de h, la courbe 3 ne peut pas convenir.

De plus, aux voisinages de -2 et 6, les limites à droite et à gauche sont différentes donc la courbe 2 ne peut pas convenir.

La courbe 1, en revanche, peut correspondre à celle de h.

3. **a.** Pour tout réel $x > 2$,

$$f(x) = \frac{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{20}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = \frac{x(1 - \frac{4}{x} + \frac{20}{x^2})}{1 - \frac{2}{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{4}{x} + \frac{20}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$. Par produit et quotient, on cocnlut que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 4x + 20 = 16$ et $\lim\limits_{x\to 2} x - 2 = 0$. De plus, si $x > 2$, $x - 2 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x - 2 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$.

b. La fonction f est dérivable sur D car c'est un quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \quad f'(x) &= \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2 - 4x + 20) \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 20}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$.

c. Pour tout $x \in D$, $(x-2)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$. On déduit alors des résultats de la question **1.** que $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \,]2\,;6]$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [6\,;+\infty[$.

d. On déduit des questions précédentes le tableau de variation ci-dessous.

x	2		6		$+\infty$
Signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 14. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' et f''.

2. a. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f'.

3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison et, pour tout réel x, $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2 = 2(6x^2 - 3x + 1)$.

2. a. Le discriminant de $6x^2 - 3x - 1$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 6 \times 1 = -15 < 0$ donc ce trinôme est du signe de $a = 6$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel x, $f''(x) > 0$ donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $f'(1) = 4 - 3 + 2 - 3 = 0$ donc, comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 1$ si $x \geqslant 1$.

3. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

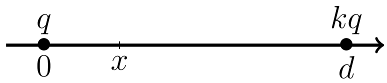
Exercice 15. Le potentiel électrostatique généré par une charge électrique q à une distance r de la charge est donnée par

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

où ε_0 est une constante.

Deux charges positives q et kq (avec $k \in]1\,;+\infty[$) sont à une distance d l'une de l'autre, et on admet que le potentiel qu'elles génèrent ensemble est la somme des potentiels générés par chaque charge.

1. Dans le repère indiqué sur la figure, la charge q se trouve en $x = 0$ et la charge kq en $x = d$. Pour tout $x \in]0\,;d[$, exprimer le potentiel généré par les deux charges au point d'abscisse x, en fonction de x.



2. Si l'on place une charge positive sur l'axe, elle se déplace vers l'abscisse x_{min} où le potentiel est minimal. Montrer que $x_{\text{min}} = \dfrac{d}{\sqrt{k}+1}$.

3. Quelle est la limite de x_{min} lorsque k tend vers 1 ?

4. Même question lorsque k tend vers $+\infty$.

Solution.

1. Soit $x \in]0\,;d[$. Le potentiel généré par la charge q au point d'abscisse x est $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$ et potentiel généré par la charge kq au point d'abscisse x est $\frac{kq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}$. Ainsi, le potentiel généré au point d'abscisse x par les deux charges est $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{kq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}$.

2. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{kq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)}$ définie sur $]0\,;d[$. La fonction f est dérivable sur $]0\,;d[$ comme somme d'inverse de fonctions dérivables et non nulles et, pour tout $x \in]0\,;d[$,

$$f'(x) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{-kq}{4\pi\varepsilon_0(d-x)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{k}{(d-x)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(d-x)^2 + kx^2}{x^2(d-x)^2}\right]$$

Comme q, π, ε_0 et $x^2(d-x)^2$ sont positifs, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-(d-x)^2 + kx^2$. Or,

$$-(d-x)^2 + kx^2 = -(d^2 - 2dx + x^2) + kx^2 = (k-1)x^2 + 2dx - d^2.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré car $k > 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (2d)^2 - 4 \times (k-1) \times (-d^2) = 4kd^2 > 0$ (car $k > 0$) donc l'équation $(k-1)x^2 + 2dx - d^2 = 9$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2d - \sqrt{4kd^2}}{2(k-1)} = \frac{-d - d\sqrt{k}}{k-1} = \frac{-d(1+\sqrt{k})}{k-1} < 0$$

et

$$x_2 = \frac{-2d + \sqrt{4kd^2}}{2(k-1)} = \frac{-d + d\sqrt{k}}{k-1} = \frac{d(\sqrt{k}-1)}{k-1} > 0$$

Comme $x_1 < 0$, $x_1 \notin]0\,;d[$. De plus, on remarque que

$$x_2 = \frac{d(\sqrt{k}-1)}{k-1} = \frac{d(\sqrt{k}-1)}{(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)} = \frac{d}{\sqrt{k}+1}$$

donc, comme $\sqrt{k} > 0$, $x_2 < d$. Ainsi, $x_2 \in]0\,;d[$. De plus, comme le coefficient dominant du trinôme est $k - 1 > 0$, $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in]0\,;x_2]$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [x_2\,;d[$. Ainsi, f est décroissant sur $]0\,;x_2]$ et croissante sur $[x_2\,;d[$ donc f atteint son minimum en x_2 et on a donc $x_{\min} = x_2 = \frac{d}{\sqrt{k}+1}$.

3. $\lim\limits_{k\to 1} \sqrt{k} = \sqrt{1} = 1$ donc, par somme et quotient, $\lim\limits_{k\to 1} x_{\min} = \frac{d}{2}$.

4. $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{k} = +\infty$ donc, par somme et quotient, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{\min} = 0$.

Exercice 16. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$.

1) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^3$ 2) $f : (x,y) \longmapsto 3x^2y^3$ 3) $f : (x,y) \longmapsto x\mathrm{e}^y + y\sin(\pi x)$
4) $f : (r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ 5) $f : (x,y) \longmapsto 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$ 6) $f : (x,y) \longmapsto 5xe^{3y}$

Solution.

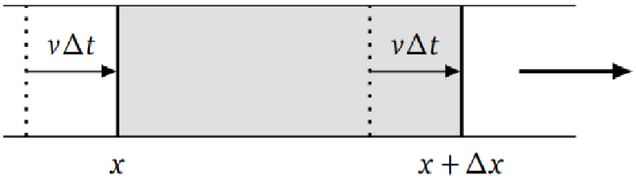
1) Pour tous réels x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2$.
2) Pour tous réels x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy^3$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y^2$.
3) Pour tous réels x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^y + \pi y\cos(\pi x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\mathrm{e}^y + \sin(\pi x)$.
4) Pour tous réels r et θ, $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,y) = -r\sin(\theta)$.
5) Pour tous réels x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x^3y^3 - y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$.
6) Pour tous réels x et y, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5\mathrm{e}^{3y}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x\mathrm{e}^{3y}$.

Exercice 17. On considère un fluide qui se déplace dans un tube, et on note $u(x,t)$ sa densité au point d'abscisse x à l'instant t. On suppose que les molécules se déplacent vers la droite avec une vitesse constante v. Dans une petite région $[x, x+\Delta x]$, à un instant t donné, on considère que la densité est constante, égale à $u(x,t)$. Le nombre de molécules à l'instant t dans cette région est $N(t) = u(x,t)\Delta x$ et sa variation sur un petit intervalle de temps est donc

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t) = u(x, t+\Delta t)\Delta x - u(x,t)\Delta x \tag{1}$$

Cette variation est aussi égale au nombre de particules qui sont entrées dans la région $[x, x+\Delta x]$ moins le nombre de particules qui en sont sorties

$$\Delta N = u(x,t)v\Delta t - u(x+\Delta x, t)v\Delta t. \tag{2}$$



1. En utilisant le fait que les expressions (1) et (2) de ΔN sont égales, en divisant par Δx et Δt puis en prenant les limites pour Δx et Δt tendant vers 0, obtenir l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. On considère les fonctions u_1 et u_2 définies par

$$u_1(x,t) = \sin(x - vt) \qquad \text{et } u_2(x,t) = \mathrm{e}^{-(x-vt)^2}.$$

Vérifier que u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation de transport.

Solution

1. D'après (1) et (2), $u(x, t+\Delta t)\Delta x - u(x,t)\Delta x = u(x,t)v\Delta t - u(x+\Delta x, t)v\Delta t$ donc, en divisant par Δx et par Δt, on obtient

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{u(x,t)v - u(x+\Delta x,t)v}{\Delta x} = -v \times \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient à gauche la dérivée de u par rapport à t en (x,t) et, en faisant tendre Δx vers 0, on obtient à droite la dérivée de u par rapport à x en (x,t). Ainsi, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -v\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$.

2. Pour tous réels x et t,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = -v\cos(x-vt) \qquad \text{et} \qquad -v\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) = -v\cos(x-vt)$$

donc u_1 est bien solution de l'équation de transport. De même, pour tous réels x et t,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = -2(-v)(x-vt)\mathrm{e}^{-(x-vt)^2} = 2v(x-vt)\mathrm{e}^{-(x-vt)^2}$$

et

$$-v\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,t) = -v(-2(x-vt)\mathrm{e}^{-(x-vt)^2} = 2v(x-vt)\mathrm{e}^{(-x-vt)^2}$$

donc u_2 est bien solution de l'équation de transport.

Exercice 18. En 1834, le physicien français Emile Clapeyron énonce la loi des gaz parfaits, qui lie entre elles les quatre variables d'état que sont la pression P, le volume V, la température T et la quantité de matière n (nombre de moles) d'un système thermodynamique constitué de gaz parfait : $PV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits, valant 8,314462 J/(mole · K). On se place ici dans le cas où la quantité de gaz n est fixée.

1. Exprimer la pression du gaz en fonction de V, n, R et T.
2. Calculer les dérivées partielles de la fonction obtenue par rapport à V et à T.

Solution.

1. Comme $PV = nrT$, $P = \dfrac{nrT}{V}$.
2. Ainsi, $\dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{nr}{V}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{nrT}{V^2}$.

Exercice 19. On a étudié la pénétration du froid dans le sol et trouvé cette formule reliant la température T à l'instant t (exprimé en heures) et la profondeur x (en m) :

$$T(x,t) = T_0 \mathrm{e}^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0, ω et λ sont des constantes.

Montrer que T satisfait à l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ désignant la dérivée partielle par rapport à x de $\frac{\partial T}{\partial x}$. La constante k est à exprimer en fonction des constantes de l'énoncé.

Solution. Pour tous réels x et t,

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = T_0 \mathrm{e}^{-\lambda x} \omega \cos(\omega t - \lambda x)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) &= T_0 \left[-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x) + \mathrm{e}^{-\lambda x}(-\lambda)\cos(\omega t - \lambda x)\right] \\ &= -T_0 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\left[\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\right]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = -T_0\lambda \Big[&-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)) \\ &+\mathrm{e}^{-\lambda x}\left((-\lambda)\cos(\omega t - \lambda x) + (-\lambda)(-\sin(\omega t - \lambda x))\right)\Big]\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 2T_0\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$$

Ainsi, on a bien $\frac{\partial^2 T}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$ en posant $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Exercice 20. Prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \longmapsto \tan^2(x)$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \tan(x) - x$ avec $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. $f : x \longmapsto \cos(x) - x\sin(x)$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto x\cos(x)$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$ avec $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.
4. $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{-1}{x(x-1)}$ avec $\mathrm{I} =]0\,;1[$.

Solution.

1. La fonction F est dérivable sur I comme différence de 2 fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I.

2. La fonction F est dérivable sur I comme produit de 2 fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x \sin x = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I.

3. La fonction F est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{F}'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\frac{x^2-1}{x^2}\frac{x^2+1}{x} = \frac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} = \frac{2(x^4-1)}{x^3} = f(x)$$

donc F est bien une primitive de f sur I.

4. La fonction F est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, en remarquant que $x(x-1) = x^2 - x$, on a $\mathrm{F}'(x) = -\left(-\dfrac{2x-1}{[x(x-1)]^2}\right) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$ donc F est bien une primitive de f sur I.

Exercice 21. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I. (On donnera la réponse sans justification.)

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = \cos x$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$

4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin(3x+1)$; $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$; $I =]0\,;+\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x + 1$; $I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$; $I = \mathbb{R}$

9) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$; $I = \mathbb{R}_+^*$

10) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $I =]0\,;+\infty[$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}$; $I = \mathbb{R}$

12) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0\,;+\infty[$

13) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $I =]0\,;+\infty[$

14) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$; $I =]0\,;+\infty[$

15) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - 1$; $I =]-\infty\,;1[$

16) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}$; $I = \mathbb{R}$

17) $f(x) = (2x-1)^3$; $I = \mathbb{R}$

18) $f(x) = 2(3x-1)^5$; $I = \mathbb{R}$

19) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 3}$; $I = \mathbb{R}$

20) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$; $I =]-2\,;+\infty[$

21) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$; $I = \mathbb{R}$

22) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $I =]-1\,;1[$

Solution. Dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle considéré est la fonction F donnée par :

1) $F : x \longmapsto \ln(x)$ 2) $F : x \longmapsto \sin(x)$ 3) $F : x \longmapsto 2\sqrt{x}$

4) $F : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ 5) $F : x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos(3x+1)$ 6) $F : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$

7) $F : x \longmapsto \dfrac{1}{20}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 + x.$

8) Comme, pour tout $x \in R$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{(x^2+2x+3)^4}$, on reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u^n}$ (avec $n \geq 2$). Dès lors, $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3(x^2+2x+3)^3}\right]$ c'est-à-dire $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{6(x^2+2x+3)^3}$.

9) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ donc $F : x \longmapsto \ln|\mathrm{e}^x - 1|$. Or, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ donc $F : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 1)$.

10) Pour tout $x > 0$, $f(x) = -(-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et on reconnaît une forme $u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, $F : x \longmapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

11) $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{3}$ 12) $\mathrm{F} : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ 13) $\mathrm{F} : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$

14) $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{4}{x} - x$.

15) Pour tout $x < 1$, $\dfrac{2}{\sqrt{1-x}} = -2\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}$ donc $F : x \longmapsto -4\sqrt{1-x} - x$.

Les 3 suivantes se ramènent à des formes $u'u^n$.

16) $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{6}(x-1)^6 = \dfrac{(x-1)^6}{18}$.

17) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2(2x-1)^3$ donc $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}(2x-1)^4 = \dfrac{(2x-1)^4}{8}$.

18) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{3} \times 3(3x-1)^5$ donc $F : x \longmapsto \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6}(3x-1)^6 = \dfrac{(3x-1)^6}{9}$.

19) On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ et on en déduit que $\mathrm{F} : x \longmapsto \ln(x^2 - x + 3)$ (car le discriminant de $x^2 - x + 3$ est $\Delta = -11 < 0$ donc, pour tout réel x, $x^2 - x + 3 > 0$).

20) On se ramène à une forme $\dfrac{u'}{u^n}$. Pour tout $x > -2$, $f(x) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3x^2}{(x^3+8)^3}$ donc

$$\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3-1}\frac{1}{(x^3+8)^{3-1}}\right) = -\frac{2}{3(x^3+8)^2}.$$

21) $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{1}{3}\sin(3x) - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

22) Pour tout réel $x \in]-1\,;1[$, $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$ et on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$. Ainsi, $F : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)$. De plus, pour tout $x \in]-1\,;1[$, $x^2 - 1 < 0$ donc

$$F : x \longmapsto \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \ln(\sqrt{1-x^2}).$$