⧫ Corrigés des exercices du chapitre 10

Exercice 1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1=(2-4\mathrm{i})-(5-4\mathrm{i})\quad z_2=(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})\quad z_3=(2+\mathrm{i})^2\quad z_4=\frac{1}{6+8\mathrm{i}}\quad z_5=\frac{1-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$$

$$z_6=\mathrm{i}^{2022}\quad z_7=\frac{1}{3-\mathrm{i}}\quad z_8=\frac{2}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\quad z_9=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\quad z_{10}=\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$$

Solution.

$z_1=2-4\mathrm{i}-5+4\mathrm{i}=-3$

$z_2=1-2\mathrm{i}-\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=1-3\mathrm{i}-2=-1-3\mathrm{i}$

$z_3=4+2\times 2\times\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=4+4\mathrm{i}-1=3+4\mathrm{i}$

$z_4=\dfrac{6-8\mathrm{i}}{6^2+8^2}=\dfrac{6}{100}-\dfrac{8}{100}\mathrm{i}=\dfrac{3}{50}-\dfrac{2}{25}\mathrm{i}$

$z_5=\dfrac{(1-\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{3^2+4^2}=\dfrac{3-4\mathrm{i}-3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{25}=\dfrac{3-7\mathrm{i}-4}{25}=-\dfrac{1}{25}-\dfrac{7}{25}\mathrm{i}$

$z_6=\mathrm{i}^{2\times 1011}=(\mathrm{i}^2)^{1011}=(-1)^{1011}=-1$

$z_7=\dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^1}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

$z_8=\dfrac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2}=\dfrac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_9=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{1^2+1^2}=\dfrac{1-2\mathrm{i}+I^2}{2}=\dfrac{1-2\mathrm{i}-1}{2}=-\mathrm{i}$

$z_{10}=\dfrac{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{\sqrt{3}^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}-\mathrm{i}\sqrt{3}^2+\mathrm{i}^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}-3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{4}=-\mathrm{i}$

Exercice 2. On considère les nombres complexes $z_1=1+\mathrm{i}$ et $z_2=2-3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_3=z_1+z_2$; *b*) $z_4=z_1z_2$; *c*) $z_5=\dfrac{1}{z_1}$; *d*) $z_6=\dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7=\overline{z_1}$; *f*) $z_8=\overline{z_1-z_2}$; *g*) $z_9=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$: *h*) $z_{10}=\dfrac{z_2}{z_1}$.

Solution.

$z_3=1+\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}$ soit $z_3=3-2\mathrm{i}$.

$z_4=z_1z_2=(1+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=2-3\mathrm{i}+2\mathrm{i}+3$ soit $z_4=5-\mathrm{i}$.

$z_5=\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}$ soit $z_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$z_6=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{2^2+3^2}=\dfrac{2+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-3}{13}$ soit $z_6=-\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$.

$z_7=\overline{1+\mathrm{i}}$ soit $z_7=1-\mathrm{i}$.

$z_8=\overline{1+\mathrm{i}-(2-3\mathrm{i})}=\overline{-1+4\mathrm{i}}$ soit $z_8=-1-4\mathrm{i}$.

$z_9=\dfrac{1}{\overline{2-3\mathrm{i}}}=\dfrac{1}{2+3\mathrm{i}}=\dfrac{2-3\mathrm{i}}{2^2+3^2}$ soit $z_9=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}\mathrm{i}$.

$z_{10}=\overline{\left(\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)}=\dfrac{\overline{2-3\mathrm{i}}}{\overline{1+\mathrm{i}}}=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2}=\dfrac{2+2\mathrm{i}+3\mathrm{i}-3}{2}$ soit $z_{10}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = (2-2\mathrm{i})^{4n}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} z_n &= \left[(2-2\mathrm{i})^4\right]^n = \left[\left((2-2\mathrm{i})^2\right)^2\right]^n = \left[\left(4-8\mathrm{i}+(2\mathrm{i})^2\right)^2\right]^n \\ &= \left[(4-8\mathrm{i}-4)^2\right]^n = \left[(-8\mathrm{i})^2\right]^n = \left[64\mathrm{i}^2\right]^n = (-64)^n \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Re}(z_n) = (-64)^n$ et $\mathrm{Im}(z_n) = 0$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $z - \overline{z}(\mathrm{i}z+1)$ est un imaginaire pur.

Solution. On peut écrire $z - \bar{z}(\mathrm{i}z+1) = z - \mathrm{i}\bar{z}z - \bar{z} = z - \bar{z} + \mathrm{i}z\bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) + \mathrm{i}z\bar{z} = \mathrm{i}(2\,\mathrm{Im}(z) + z\bar{z})$. Or, par définition, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et, par propriété, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$. On peut donc conclure que $z - \bar{z}(\mathrm{i}z+1)$ est un imaginaire pur.

Exercice 5. Pour tout complexe z, on pose $Z = z - 2\overline{z} + \mathrm{i}$.

1. Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$; $z = \mathrm{i}$ puis $z = 1-\mathrm{i}$.
2. On écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$. Déterminer la forme algébrique Z en fonction de x et y.
3. En déduire que Z est imaginaire pur si et seulement si z imaginaire pur.

Solution.

1. Si $z = 0$ alors $Z = \mathrm{i}$, si $z = \mathrm{i}$ alors $Z = \mathrm{i} - 2(-\mathrm{i}) + \mathrm{i} = 4\mathrm{i}$ et si $z = 1-\mathrm{i}$ alors $Z = 1 - \mathrm{i} - 2(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i} = -1 - 2\mathrm{i}$.
2. $Z = x + \mathrm{i}y - 2\left(\overline{x+\mathrm{i}y}\right) + \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) + \mathrm{i}$ soit $Z = -x + (3y+1)\mathrm{i}$.
3. Z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(Z) = 0$ donc si et seulement si $x = 0$. Or, $x = \mathrm{Re}(z)$ donc $x = 0$ si et seulement si z imaginaire pur. On a donc montré que Z est imaginaire pur si et seulement si z est imaginaire pur.

Exercice 6. Démonter que, si z est un imaginaire pur et si n est un entier naturel impair, alors z^n est également un imaginaire pur.

Solution. Soit z un imaginaire pur et n est un entier naturel impair. Alors, il existe un réel b tel que $z = \mathrm{i}b$ et un entier naturel k tel que que $n = 2k+1$. Dès lors, $z^n = (\mathrm{i}b)^{2k+1} = \mathrm{i}^{2k+1}b^{2k+1}$. Or, $\mathrm{i}^{2k+1} = \mathrm{i}^{2k}\mathrm{i}^1 = \left(\mathrm{i}^2\right)^k \mathrm{i} = (-1)^k\mathrm{i}$ donc $z^n = (-1)^k b^{2k+1}\mathrm{i}$ ce qui prouve que z^n est imaginaire pur car $(-1)^k b^{2k+1}$ est réel.

Exercice 7 (5 points). Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $(E) : (1+2\mathrm{i})z = 1 - 2\mathrm{i}z$.
2. $(F) : (z+\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1) = 0$.
3. $(G) : 2z + \overline{z} = \mathrm{i} + 2$.
4. $(H) : z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Solution.

1. Pour tout complexe z,

$$(E) \iff (2+\mathrm{i})z = \mathrm{i} - 3z \iff (5+\mathrm{i})z = \mathrm{i} \iff z = \frac{\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}} \iff z = \frac{\mathrm{i}(5-\mathrm{i})}{5^2+1^2} \iff z = \frac{1}{26} + \frac{5}{26}\mathrm{i}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{1}{26} + \frac{5}{26}\mathrm{i}\right\}$.

2. Pour tout complexe z,

$$(F) \iff z - 2\mathrm{i} = 0 \text{ ou } \mathrm{i}z + 2 - \mathrm{i} = 0 \iff z = 2\mathrm{i} \text{ ou } \mathrm{i}z = -2 + \mathrm{i}$$
$$\iff z = 2\mathrm{i} \text{ ou } z = \frac{-2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \iff z = 2\mathrm{i} \text{ ou } z = \frac{(-2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{1^2} \iff z = 2\mathrm{i} \text{ ou } z = 1 + 2\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\{2\mathrm{i}\,;1+2\mathrm{i}\}$.

3. Si z est nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$. Alors, pour tout complexe z,

$$(G) \iff x + \mathrm{i}y - 2(x - \mathrm{i}y) = 3 - 2\mathrm{i} \iff -x + 3\mathrm{i}y = 3 - 2\mathrm{i}$$
$$\iff \begin{cases} -x = 3 \\ 3y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \iff z = -3 - \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (G) est $\left\{-3 - \dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}$.

4. On procède comme pour (G) :

$$(H) \iff (x+\mathrm{i}y)^2 - 2(x - \mathrm{i}y) + 1 = 0 \iff x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 2x + 2\mathrm{i}y + 1 = 0$$
$$\iff x^2 - y^2 - 2x + 1 + \mathrm{i}(2xy + 2y) = 0$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 4 - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$
$$\iff z = 1 \text{ ou } z = -1 + 2\mathrm{i} \text{ ou } z = -1 - 2\mathrm{i}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) est $\{1\,;-1+2\mathrm{i}\,;-1-2\mathrm{i}\}$.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(E_1) $2z^2 - 2z + 5 = 0$ $\quad$ (E_2) $-z^2 + 2z - 5 = 0$ $\quad$ (E_3) $z^2 + z - 1 = 0$ $\quad$ (E_4) $3z^2 - 5z + 3 = 0$

(E_5) $z^2 + 81 - 18z = 25$ $\quad$ (E_6) $25 + z^2 + 10z = 16$ $\quad$ (E_7) $2z^2 - 8z + 3 = -z^2 + 2z$

Solution.

• (E_1) $2z^2 - 2z + 5 = 0$

Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 4 - 40 = -36 < 0$ donc (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{2 - 6\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\,;\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$.

• (E_2) $-z^2 + 2z - 5 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 4 - 20 = -16 < 0$ donc (E_2) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 4\mathrm{i}}{-2} = 1 + 2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{1 - 2\mathrm{i}\,; 1 + 2\mathrm{i}\}$.

- (E_3) $z^2 + z - 1 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$ donc (E_3) admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

- (E_4) $3z^2 - 5z + 3 = 0$

Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 25 - 36 = -11 < 0$ donc (E_4) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-5) - \mathrm{i}\sqrt{11}}{2 \times 3} = \frac{5}{6} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{6} \text{ et } z_2 = \frac{5}{6} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_4) est $\left\{\frac{5}{6} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{6}\,; \frac{5}{6} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{6}\right\}$.

- (E_5) $z^2 + 81 - 18z = 25$

Méthode 1

$$(E_5) \iff z^2 - 18z + 81 - 25 = 0 \iff z^2 - 18z + 56 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 56 = 100 > 0$ donc (E_5) admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-(-18) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{18 - 10}{2} = 4 \text{ et } z_2 = \frac{-(-18) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{18 + 10}{2} = 14.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_5) est $\{4\,; 14\}$.

Méthode 2

$$(E_5) \iff z^2 - 2 \times 9 \times z + 9^2 - 25 = 0 \iff (z-9)^2 - 5^2 = 0. \iff (z - 9 - 5)(z - 9 + 5) = 0$$
$$\iff (z - 14)(z - 4) = 0 \iff z - 14 = 0 \text{ ou } z - 4 = 0 \iff z = 14 \text{ ou } z = 4$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_5) est $\{4\,; 14\}$.

- (E_6) $25 + z^2 + 10z = 16$

Méthode 1

$$(E_6) \iff z^2 + 10z + 25 - 16 = 0 \iff z^2 + 10z + 9 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 9 = 64 > 0$ donc (E_6) admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-10 - 8}{2} = -9 \text{ et } z_2 = \frac{-1 + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{-10 + 8}{2 \times 1} = -1.$$

Ainsi, 'ensemble des solutions de (E_5) est $\{-9\,; -1\}$.

Méthode 2

$$(E_6) \iff z^2 - 2 \times 5 \times z + 5^2 - 16 = 0 \iff (z+5)^2 - 4^2 = 0. \iff (z + 5 - 4)(z + 5 + 4) = 0$$
$$\iff (z + 1)(z + 9) = 0 \iff z + 1 = 0 \text{ ou } z + 9 = 0 \iff z = -1 \text{ ou } z = -9$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_6) est $\{-1\,;-9\}$.

- (E_7) $2z^2-8z+3=-z^2+2z$

$$(E_7)\iff 2z^2-8z+3+z^2-2z=0\iff 3z^2-10z+3=0.$$

Le discriminant est $\Delta=(-10)^2-4\times3\times3=64>0$ donc (E_7) admet deux solutions réelles :

$$z_1=\frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2\times3}=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3}\text{ et }z_2=\frac{-(-10)+\sqrt{64}}{2\times3}=\frac{10+8}{2\times3}=6.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_7) est $\left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$.

Exercice 9. Étant donné un nombre complexe w, on dit qu'un nombre complexe u est une racine carrée de w si $u^2=w$.

1. Soit $w\in\mathbb{C}$. Supposons que u est une racine carrée de w.

a. Montrer que l'équation $z^2=w$ est équivalente à l'équation $(z-u)(z+u)=0$.

b. En déduire que w possède au plus deux racines carrées.

2. On suppose que u est une racine carrée du nombre i et on écrit u sous forme algébrique $u=a+\mathrm{i}b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

a. Justifier que $\begin{cases}a^2=b^2\\2ab=1\end{cases}$

b. En déduire que $a\in\left\{-\dfrac{1}{\sqrt2}\,;\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$ et que $a=b$.

c. Déterminer l'ensemble des racines carrées de i.

Solution.

1. a. Par définition, $u^2=w$ donc

$$z^2=w\iff z^2=u^2\iff z^2-u^2=0\iff(z-u)(z+u)$$

ce qui montré l'équivalence voulue.

b. On en déduit que $z^2=w$ si et seulement si $z-u=0$ ou $z+u=0$ i.e. $z=u$ ou $z=-u$. Ainsi, l'équation $z^2=w$ possède au plus deux solutions i.e. w possède au plus deux racines carrées.

2. On suppose que u est une racine carrée du nombre i et on écrit u sous forme algébrique $u=a+\mathrm{i}b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

a. Par définition, $z^2=\mathrm{i}$ donc $(a+\mathrm{i}b)^1=\mathrm{i}$ i.e. $a^2+2\mathrm{i}ab-b^2=\mathrm{i}$. Ainsi, en égalant les parties réelles et imaginaires $a^2-b^2=0$ et $2ab=1$. On en déduit que $\begin{cases}a^2=b^2\\2ab=1\end{cases}$

b. Il s'ensuit que $|a|=|b|$ et, comme $2ab=1$, a et b ont même signe donc $a=b$. Ainsi, $2a^2=1$ i.e. $a^2=\dfrac{1}{2}$ et donc $a\in\left\{-\dfrac{1}{\sqrt2}\,;\dfrac{1}{\sqrt2}\right\}$.

c. On conclut que les valeurs possibles pour u sont $u_1=\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt2}\mathrm{i}$ et $u_2=-\dfrac{1}{\sqrt2}-\dfrac{1}{\sqrt2}\mathrm{i}$. Réciproquement, on vérifie que $u_1^2=u_2^2=\mathrm{i}$ donc l'ensemble des racines carrées de i est $\left\{\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt2}\mathrm{i}\,;-\dfrac{1}{\sqrt2}-\dfrac{1}{\sqrt2}\mathrm{i}\right\}$.

Exercice 10. Calculer les modules des nombres complexes suivants.

$z_1 = (5+2\mathrm{i})-4(2+3\mathrm{i}) \qquad z_2 = \sqrt{3}-2\mathrm{i} \qquad z_3 = (1+2\mathrm{i})\times 5(2-3\mathrm{i}) \qquad z_4 = -2(\sqrt{3}-\mathrm{i})+4(6-\mathrm{i})$

Solution.
$z_1 = -3-10\mathrm{i}$ donc $|z_1| = \sqrt{(-3)^2+(-10)^2} = \sqrt{109}$
$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-2)^2} = \sqrt{7}$
$z_3 = (1+2\mathrm{i})(10-15\mathrm{i}) = 10-15\mathrm{i}+20\mathrm{i}+30 = 40+5\mathrm{i}$ donc $|z_3| = \sqrt{40^2+5^2} = \sqrt{1625} = 5\sqrt{65}$
$z_4 = 24-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ donc $|z_4| = \sqrt{(24-2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{576-96\sqrt{3}+12+4} = \sqrt{592-96\sqrt{3}}.$

Exercice 11. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

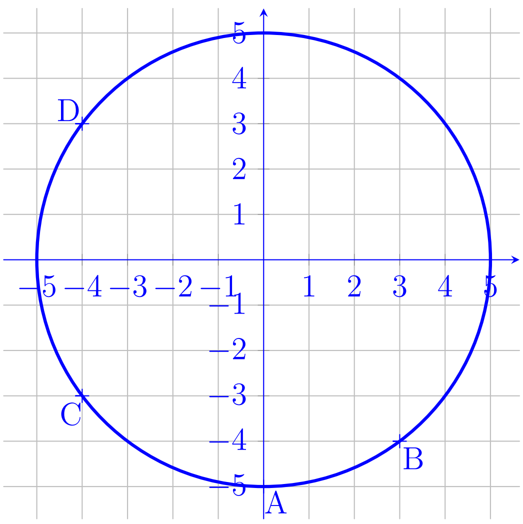
$$z_{\mathrm{A}} = -5 \qquad z_{\mathrm{B}} = 3-4\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{C}} = -4-3\mathrm{i} \qquad z_{\mathrm{D}} = -4+3\mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe.

2. Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle de centre O.

Solution.

1.



2. On a $\mathrm{OA} = |z_{\mathrm{A}}| = 5$, $\mathrm{OB} = |z_{\mathrm{B}}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\mathrm{OC} = |z_{\mathrm{C}}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $\mathrm{OD} = |z_{\mathrm{D}}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5.

Exercice 12. Parmi les complexes suivants, déterminer ceux qui appartiennent à $\mathbb{U}$.

$$z_1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad z_2 = -\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}\mathrm{i} \qquad z_3 = \frac{2\text{‘}\sqrt{6}+\mathrm{i}}{5} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Solution.
$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}} \neq 1$ donc $z_1 \notin \mathbb{U}$.

$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$ donc $z_2 \in \mathbb{U}$.

$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$ donc $z_3 \in \mathbb{U}$.

$|z_4| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \neq 1$ donc $z_4 \notin \mathbb{U}$.

Exercice 13. On considère les complexes suivants :

$$z_1 = 4\mathrm{i} \qquad z_2 = -10 \qquad z_3 = 5 - 5\mathrm{i} \qquad z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$$a = z_1 z_2 \qquad b = \frac{z_4}{z_1} \qquad c = \frac{z_2}{z_3} \qquad d = z_3^2 \times z_2.$$

Solution.
$|a| = |z_1|\,|z_2| = 4 \times 10 = 40$
$|b| = \dfrac{|z_4|}{|z_1|} = \dfrac{|z_4|}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{4}}{4} = \dfrac{1}{2}$
$|c| = \left|\dfrac{z_2}{z_3}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_3|} = \dfrac{10}{\sqrt{5^2 + (-5)^2}} = \dfrac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
$|d| = |z_3|^2\,|z_2| = (5\sqrt{2})^2 \times 10 = 500$

Exercice 14. Montrer que les complexes suivants appartiennent à $\mathbb{U}$.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad z_3 = \mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Solution.
$|z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 1$ donc $z_1 \in \mathbb{U}$.
$|z_2| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$ donc $z_2 \in \mathbb{U}$.
$|z_3| = |\mathrm{i}| = 1$ donc $z_3 \in \mathbb{U}$.
$|z_4| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9} + \dfrac{4}{9}} = 1$ donc $z_4 \in \mathbb{U}$.

Exercice 15.

1. Démontrer que z est un imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $c = \frac{z+1}{z-1}$. Démontrer que l'ensemble des nombres complexes $z \neq 1$ tels que c soit imaginaire pur est $\mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Solution.

1. On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ sous forme algébrique. Alors,

$$\overline{z} = -z \iff x - \mathrm{i}y = -(x + \mathrm{i}y) \iff x - \mathrm{i}y = -x - \mathrm{i}y = \!\!\iff x = -x \iff x = 0$$

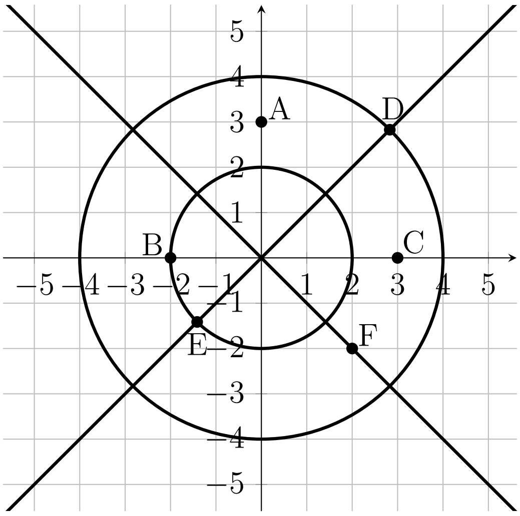
donc $\overline{z} = -z$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ i.e. si et seulement si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

2. Grâce à la question précédente, pour tout $z \neq 1$,

$$\begin{aligned} c \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{c} = -c \iff \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1} &\iff \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1} \\ &\iff (\overline{z}+1)(z-1) = -(z+1)(\overline{z}-1) \\ &\iff \overline{z}z - \overline{z} + z - 1 = -(z\overline{z} - z + \overline{z} - 1) \\ &\iff |z|^2 + z - \overline{z} - 1 = -|z|^2 + z - \overline{z} + 1 \\ &\iff 2|z|^2 = 2 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1 \\ &\iff z \in \mathbb{U} \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $c \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.

Exercice 16. Déterminer graphiquement un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D}, z_{E} et z_{F}.

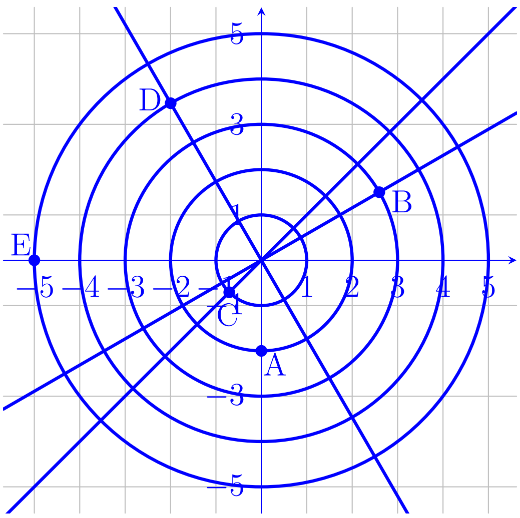


Solution. Graphiquement, $\arg(z_{\mathrm{A}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\arg(z_{\mathrm{B}}) = \pi\ [2\pi]$, $\arg(z_{\mathrm{C}}) = 0\ [2\pi]$, $\arg(z_{\mathrm{D}}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$, $\arg(z_{\mathrm{E}}) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$, $\arg(z_{\mathrm{F}}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Exercice 17. Placer les points A, B, C, D et E tels que

1. $|z_{\mathrm{A}}| = 2$ et $\arg(z_{\mathrm{A}}) = \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$;
2. $|z_{\mathrm{B}}| = 3$ et $\arg(z_{\mathrm{B}}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$;
3. $|z_{\mathrm{C}}| = 1$ et $\arg(z_{\mathrm{C}}) = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$;
4. $|z_{\mathrm{D}}| = 4$ et $\arg(z_{\mathrm{D}}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$;
5. $|z_{\mathrm{E}}| = 5$ et $\arg(z_{\mathrm{E}}) = -\pi\ [2\pi]$;

Solution.



Exercice 18. Dans chacun des cas suivants, donner la forme algébrique de z.

1. $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$;
2. $|z| = 2$ et $\arg(z) = \pi\ [2\pi]$;
3. $|z| = 1$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$;

4. $|z|=5$ et $\arg(z)=\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$;

5. $|z|=4$ et $\arg(z)=-\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$;

Solution.

1. $z=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=3(0+\mathrm{i})=3\mathrm{i}.$

2. $z=2\left(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\right)=2(-1+\mathrm{i}0)=-2.$

3. $z=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $z=5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{5\sqrt{2}}{2}.$

5. $z=4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}.$

Exercice 19. Déterminer module et argument des nombres complexes suivants.

$$z_1=1-\mathrm{i}\sqrt{3}\qquad z_2=-2\qquad z_3=\sqrt{3}+3\mathrm{i}\qquad z_4=-4-4\mathrm{i}.$$

Solution.

- $|z_1|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$
  $z_1=2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ donc $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- z_2 est un réel négatif donc $|z_2|=2$ et $\arg(z_2)=\pi\ [2\pi]$
- $|z_3|=\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
  $z_3=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos(\frac{2\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$ donc $\arg(z_3)=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
- $|z_4|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{2\times 4^2}=4\sqrt{2}$
  $z_4=4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\cos(-\frac{3\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)$ donc $\arg(z_1)=-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Exercice 20. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

$$z_1=-6\mathrm{i}\qquad z_2=5-5\mathrm{i}\qquad z_3=-\sqrt{3}+3\mathrm{i}\qquad z_4=-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Solution.

- $z_1=6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
- $|z_2|\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{5^2\times 2}=5\sqrt{2}$ et ainsi

$$z_2=5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

- $|z_3|\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ et ainsi

$$z_3=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

- $|z_4|=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$ et ainsi

$$z_4=4\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

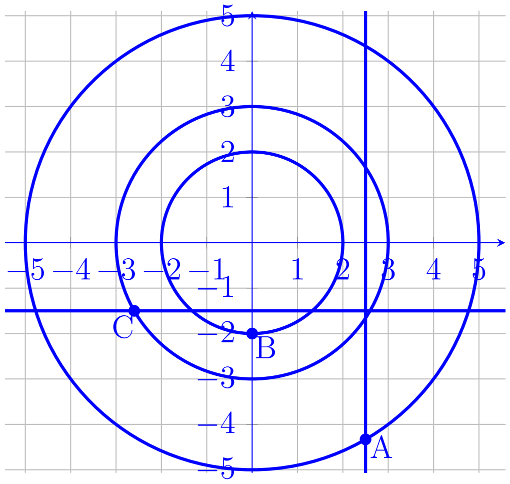
Exercice 21. Placer dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_{\mathrm{A}} = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$z_{\mathrm{B}} = 2\left(\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$z_{\mathrm{C}} = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{63}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

Solution.



Exercice 22. Écrire les complexes suivants sous forme exponentielle.

$$a = 4\mathrm{i} \qquad b = -11 \qquad c = -\frac{7\mathrm{i}}{2} \qquad d = 1 + \mathrm{i}.$$

Solution.

$a = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $b = 11\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$; $c = \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;

$|d| = \sqrt{2}$ et $d = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 23. Écrire les complexes suivants sous forme algébrique.

$$a = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \qquad b = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \qquad c = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \qquad d = 7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Solution.

$a = -2\mathrm{i}$; $b = -4$; $c = 5\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{2\pi}{3})\right) = 5(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5}{2} - \mathrm{i}\frac{5\sqrt{3}}{2}$;

$d = 7\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 7(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 24. Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants

$$a = \frac{8\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} \qquad b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad c = 4\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}} \qquad d = 2\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} \qquad e = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^5 \qquad f = \frac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^7}$$

Solution.

$a = \frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$; $b = -5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$;

$c = 4\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}} = 4\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{7}\right)} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{42}}$; $d = 2\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

$e = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$;

$f = \frac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^7} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{10\pi}{3}-\frac{7\pi}{6}\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{27\pi}{6}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{9\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

Exercice 25. On considère les nombres complexes $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et celle de z_2.
2. En déduire les forme exponentielle de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et $\frac{z_1^3}{z_2^4}$.

Solution.

1. $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ et ainsi $z_1 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et ainsi $z_2 = \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. $z_1 z_2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$
   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$
   $\frac{z_1^3}{z_2^4} = \frac{\left(4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \frac{64\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}}}{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{4}}} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

Exercice 26. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n - \frac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin(nx)$.
2. Déterminer une expression analogue pour $z^n + \frac{1}{z^n}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, d'après les formules d'Euler,
$$z^n - \frac{1}{z^n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n - \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = 2\mathrm{i}\sin(nx).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. De même,
$$z^n + \frac{1}{z^n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n + \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = 2\cos(nx).$$

Exercice 27. Soit z et z' deux complexes de module 1.

1. Justifier l'existence de deux réels θ et α tels que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
2. Montrer que, si $z' \neq z$, alors $\frac{zz'-1}{z'-z}$ est un réel.
3. Montrer que $\frac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.

Solution.

1. En notant θ et α des arguments respectivement de z et de z', on a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ car $|z| = |z'| = 1$.
2. Supposons $z' \neq z$. Alors,
$$\begin{aligned}
\frac{zz'-1}{z'-z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta+\alpha}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha-\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)} \qquad \text{(d'après les formules d'Euler)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$
   donc $\frac{zz'-1}{z'-z}$ est un réel.

3. De même,

$$\frac{z^2-1}{z} = \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2 - 1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

d'après les formules d'Euler. Ainsi, $\frac{z^2-1}{z}$ est un imaginaire pur.

Exercice 28. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler, linéariser :

$$\cos^3(x) \qquad \cos^4(x) \qquad \cos^2(x)\sin^2(x).$$

Solution.

$$\begin{aligned}
cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 3(2\cos(x))\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 \\
&= \frac{1}{18}\left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right) + 6\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 4(2\cos(2x)) + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((e^{ix})^2 + 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2\right) \times \frac{1}{-4}\left((e^{ix})^2 - 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{2ic} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{2ic} - 2 + e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 2e^{2ix} - 4 + 2e^{-2ix} + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 2\right)) \\
&= -\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 29. Soit $x \in \mathbb{R}$. exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

Solution.
Par propriété, $\sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{3ix}) =\in ((e^{ix})^3)$. Or,

$$\begin{aligned}(e^{ix})^3 &= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)(i\sin(x)) + 3\cos(x)(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)\end{aligned}$$

donc $\sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{3ix}) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$.

Par propriété, $\cos(4x) = \operatorname{Im}(e^{4ix}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^4)$. Or,

$$\begin{aligned}(e^{ix})^4 &= (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) + 6\cos^2(x)(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x)\end{aligned}$$

donc $\cos(4x) = \operatorname{Re}(e^{4ix}) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$.

Exercice 30. On considère le nombre complexe $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$w^5 = 1 \qquad w^8 = w^3 \qquad w^4 = \frac{1}{w} \qquad (1-w)(1+w+w^2+w^3+w^4) = 0.$$

2. On pose $s = w + w^4$ et $t = w^2 + w^3$. Déduire de la question précédente les égalités suivantes :

$$s^2 = 2 + t \qquad 1 + s + t = 0.$$

3. **a.** En isolant t dans la deuxième égalité et en remplaçant t par son expression dans la première, montrer que $s^2 + s - 1 = 0$.

b. En déduire les deux valeurs possibles pour s.

4. Montrer que $s = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Solution

1. $w^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$. Dès lors, en multipliant par w^3, il vient $w^5w^3 = W^3$ donc $w^8 = w^3$ et, en division par $w \neq 0$, il vient $\frac{w^5}{w} = \frac{1}{w}$ c'est-à-dire $w^4 = \frac{1}{w}$.
Enfin, en développant

$$(1-w)(1+w+w^2+w^3+w^4) = 1+w+w^2+w^3+w^4-w-w^2-w^3-w^4-w^5 = 1-w^5 = 1-1 = 0.$$

2. En utilisant ce qui précède,

$$s^2 = (w+w^4)^2 = w^2 + 2ww^4 + (w^4)^2 = w^2 + 2w^5 + w^8 = w^2 + 2 + w^3 = 2 + t$$

et

$$1 + s + t = 1 + w + w^4 + w^2 + w^3 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$$

car $(1-w)(1+w+w^2+w^3+w^4) = 0$ et $w \neq 1$ donc $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$.

3. **a.** On en déduit que $t = -1 - s$ donc $s^2 = 2 + (-1-s) = 1 - s$ c'est-à-dire $s^2 + s - 1 = 0$.

b. Le discriminant de $x^2 + x - 1$ est $\Delta = 1^4 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit donc que s est égal à l'une de ces deux valeurs.

4. Comme $w^4 = \frac{1}{w} = w^{-1}$, $s = w + w^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$. De plus, $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ et ainsi $s > 0$. Comme $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, on en déduit que $s = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 31. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta).$$

1. On pose :

$$U_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta} \qquad \text{et} \qquad V_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\theta}.$$

   a. Justifier que $U_n(\theta) = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 1)^n$.
   b. En factorisant par $e^{\mathrm{i}\theta}$, montrer que $U_n(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta)$.
   c. En déduire la valeur de $V_n(\theta)$.

2. Conclure que $S_n(\theta) = 2^n \cos^n(\theta)\cos(n\theta)$.

Solution.

1. a. En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k \times 1^{n-k} = (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 1)^n.$$

   b. On en déduit que

$$U_n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times 2\cos(\theta)\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta)$$

   c. On remarque $V_n(\theta) = U_n(-\theta)$ donc $V_n(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(-\theta)} \times 2^n \cos^n(-\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta)$ par parité de cos.

2. On remarque

$$\begin{aligned} U_n(\theta) + V_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\theta}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2\cos(2k\theta)\right) = 2S_n(\theta) \end{aligned}$$

   donc

$$S_n(\theta) = \frac{U_n(\theta) + V_n(\theta)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \times 2^n \cos^n(\theta)}{2} = 2^n \cos^n(\theta) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{2}$$

   c'est-à-dire, d'après les formules d'Euler,

$$S_n = 2^n \cos^n(\theta)\cos(n\theta).$$