

Devoir surveillé n°6

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

a. $f : x \mapsto x + e^x$

b. $f : x \mapsto xe^x$

c. $f : x \mapsto (2 + \cos(x))^3$

d. $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x})$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .

a. $f : x \mapsto x + e^x$

b. $f : x \mapsto \frac{x^4 + x^2}{3}$

c. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$

d. $f : x \mapsto xe^{x^2}$

3. Dans chaque cas, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a .

a. $f : x \mapsto x + e^x, a = -\infty$ b. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}, a = +\infty$ c. $f : x \mapsto \ln(x)e^x, a = 0^+$.

Solution.

1. a. Pour tout réel x , $f'(x) = 1 + e^x$.

b. Pour tout réel x , $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$ soit $f'(x) = (x + 1)e^x$.

c. Pour tout réel x , $f'(x) = 3 \times (-\sin(x)) \times (2 + \cos(x))^2$ soit $f'(x) = -3 \sin(x)(2 + \cos(x))^2$.

d. Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

2. a. Une primitive f sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + e^x$.

b. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^2$ donc une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{9}x^3.$$

c. Pour tout réel x , $f(x) = -\frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$ donc, en reconnaissant une forme $\frac{u'}{u}$, on

conclut qu'une primitive de f sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto -\left(\frac{1}{2-1} \times \frac{1}{(2 + \cos(x))^1}\right)$ i.e.

$$F : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x)}.$$

d. Pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ donc, en reconnaissant une forme $u'e^u$, on conclut qu'une primitive de f sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.

3. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^x = -\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

Exercice 2. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une famille génératrice.
2. Déterminer une base de F et donner la dimension de F .
3. On considère l'ensemble $G = \{(-a - b, -2a + 2b, a - b, 2a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
 - a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une famille génératrice.
 - b. Déterminer la dimension de G .
 - c. Montrer que $G \subset F$. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - y - z \text{ et } x + 2y + 3z + (-x - y - z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - y - z \text{ et } y + 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - y - z \text{ et } y = -2z\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - (-2z) - z \text{ et } z = -x\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x + z \text{ et } y = -2z\} \\ &= \{(x, -2z, z, -x + z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 0, -1) + z(0, -2, 1, 1) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

donc, en posant $u = (1, 0, 0, -1)$ et $v = (0, -2, 1, 1)$, $F = \text{Vect}((u, v))$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2. Comme les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, (u, v) est une famille libre et donc (u, v) est une base de F . On en déduit que $\dim(F) = 2$.

3. a. On remarque que

$$G = \{a(-1, -2, 1, 2) + b(-1, 2, -1, 0) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

donc, en posant $u' = (-1, -2, 1, 2)$ et $v' = (-1, 2, -1, 0)$, $G = \text{Vect}(u', v')$. Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et (u', v') en est une famille génératrice.

- b. Comme les vecteurs u' et v' ne sont pas colinéaires, (u', v') est libre donc (u', v') est une base de G . Ainsi, $\boxed{\dim(G) = 2}$.
- c. Comme $-1 + (-2) + 1 + 2 = 0$ et $-1 + 2 \times (-2) + 3 \times 1 + 2 = 0$, $u' \in F$ et, comme $-1 + 2 + (-1) + 0 = 0$ et $-1 + 2 \times 2 + 3 \times (-1) + 0 = 0$, $v' \in F$. Dès lors, comme F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , $\text{Vect}((u', v')) \subset F$ i.e. $\boxed{G \subset F}$. Or, $\dim(G) = \dim(F)$ donc, par propriété, $\boxed{G = F}$.

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

On cherchera une solution particulière sous la forme $g : x \mapsto axe^{2x}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution. L'équation homogène associée à (E) est $y'' - y' - 2y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $(C) : x^2 - x - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc (C) possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Soit a un réel et $g : x \mapsto axe^{2x}$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$g'(x) = ae^{2x} + ax(2e^{2x}) = (2ax + a)e^{2x}.$$

De même, g' est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$g''(x) = 2ae^{2x} + (2ax + a)(2e^{2x}) = (4ax + 4a)e^{2x}$$

donc

$$g''(x) - g'(x) - 2g(x) = (4ax + 4a)e^{2x} - (2ax + a)e^{2x} - 2axe^{2x} = 3ae^{2x}.$$

Ainsi, pour que g soit une solution de (E) , il suffit que $3a = 1$ i.e. $a = \frac{1}{3}$. On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{3}xe^{2x}$ est une solution de (E) et donc que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{ x \mapsto Ae^{-x} + \left(\frac{1}{3}x + B \right) e^{2x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

On considère deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 1 boule rouge et 3 boules noires et l'urne U_2 contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

On s'intéresse à l'expérience suivante. On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne U_1 . On note sa couleur et on la remet dans l'urne. On effectue ensuite une succession de tirages d'une boule avec remise de telle sorte que :

- si, lors d'un tirage, on obtient une boule rouge alors le tirage suivant est effectué dans l'urne U_1 ;

- si, lors d'un tirage, on obtient une boule noire alors le tirage suivant est effectué dans l'urne U_2 .

Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne où elle a été tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'évènement « La boule obtenue lors du n -ième tirage est rouge ».

- Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(\overline{R_1})$.
 - Déterminer $\mathbf{P}(R_2 | R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 | \overline{R_1})$.
 - Déduire des questions précédentes la probabilité de R_2 .
 - Si la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit également rouge ?
- Déterminer la probabilité que les 3 premières boules tirées soient rouges.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire lors des n premiers tirages ?
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbf{P}(R_n)$.
 - En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = p_n - \frac{4}{9}$.
Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de u_n puis de p_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de (p_n) et donner une interprétation du résultat obtenu.

Solution.

- Par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(R_1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(\overline{R_1}) = \frac{3}{4}$.
 - Si R_1 est réalisé alors le second tirage est effectué dans l'urne U_1 et, par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(R_2 | R_1) = \frac{1}{4}$. Dans le cas contraire, le second tirage est effectué dans U_2 donc, de même, $\mathbf{P}(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{3}{5}$.
 - Comme $(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 | R_1) + \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$$

donc $\mathbf{P}(R_2) = \frac{41}{80}$.

- Par la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(R_1 | R_2) = \frac{\mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 | R_1)}{\mathbf{P}(R_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{41}{80}} = \frac{1}{16} \times \frac{80}{41}$$

donc $\mathbf{P}(R_1 | R_2) = \frac{5}{41}$.

2. a. Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 | R_1)\mathbf{P}(R_3 | R_1 \cap R_2).$$

Or, tant qu'on tire une boule rouge, on effectue les tirages dans l'urne U_1 donc

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

Ainsi, la probabilité que les trois premières boules soient rouges est $\frac{1}{64}$.

b. De la même façon

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 | R_1) \cdots \mathbf{P}(R_n | R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n\end{aligned}$$

donc la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges est $\frac{1}{4^n}$.

c. L'évènement « obtenir au moins une boule noire lors des n premiers tirages » est le contraire de l'évènement « les n premières boules tirées sont rouges » et ainsi

la probabilité d'obtenir au moins une boule noire lors des n premiers tirages est $1 - \frac{1}{4^n}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_{n+1}) = \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1} | R_n) + \mathbf{P}(\overline{R_n})\mathbf{P}(R_{n+1} | \overline{R_n}) = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{3}{5}$$

donc $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{4}{9} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n) - \frac{4}{9} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5}\right)p_n + \frac{3}{5} - \frac{4}{9} \\ &= -\frac{7}{20}p_n + \frac{7}{45} \\ &= -\frac{7}{20}\left(p_n + \frac{7}{45} \times \left(-\frac{20}{7}\right)\right) \\ &= -\frac{7}{20}\left(p_n - \frac{4}{9}\right) \\ &= -\frac{7}{20}u_n.\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{7}{20}$. De plus son premier terme est

$$u_1 = p_1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} \text{ soit } u_1 = -\frac{7}{36}.$$

c. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = -\frac{7}{36} \left(-\frac{7}{20}\right)^{n-1}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = p_n - \frac{4}{9} \text{ donc } p_n = \frac{4}{9} + u_n. \text{ Ainsi, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{4}{9} - \frac{7}{36} \left(-\frac{7}{20}\right)^{n-1}}.$$

d. Comme $-1 < -\frac{7}{20} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{20}\right)^{n-1} = 0$ donc, par produit et somme,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{9}}.$$

On en déduit qu'après un grand nombre de lancers, la probabilité de tirer une boule rouge se stabilise autour de $\frac{4}{9}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 0$.
2. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = n.$$

- b. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n \geq 0$.
- c. En déduire que (u_n) est croissante.
- d. En utilisant le résultat de la question **3.a.**, démontrer par l'absurde que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n) .
4. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{n-1}$.
- b. Retrouver, par une autre méthode, le résultat de la question **3.d.**.
5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$, démontrer que

$$u_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n .
- c. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geq 0$ ».
 - **Initialisation.** Comme $u_0 = 0$, u_0 existe et $u_0 \geq 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n^2 + n \geq 0$ donc $\sqrt{u_n^2 + n}$ existe et est positif i.e. u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
 - **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 0}.$$

2. $u_1 = u_{0+1} = \sqrt{u_0^2 + 0} = \sqrt{0^2 + 0}$ donc $u_1 = 0$.
 $u_2 = u_{1+1} = \sqrt{u_1^2 + 1} = \sqrt{0^2 + 1}$ donc $u_2 = 1$.
 $u_3 = u_{2+1} = \sqrt{u_2^2 + 2} = \sqrt{1^2 + 2}$ donc $u_3 = \sqrt{3}$.
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = u_{n+1}^2 - u_n^2 = \sqrt{u_n^2 + n}^2 - u_n^2 = u_n^2 + n - u_n^2$$

donc $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = n$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ donc $u_n + u_{n+1} \geq 0$.
- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = n$ donc $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) \geq 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $u_{n+1} + u_n$ sont de même signe. Or, on a vu dans la question précédente que $u_{n+1} + u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. On conclut donc que (u_n) est croissante.
- d. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ . Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc $u_{n+1}^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^2$. On en déduit que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^2 - \ell^2 = 0$ c'est-à-dire, d'après la question 3.a., $n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. C'est absurde donc (u_n) diverge. Comme (u_n) est croissante, on déduit alors du théorème de la limite monotone que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $n - 1 \in \mathbb{N}$ donc $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 + n - 1}$. Or, $u_{n-1}^2 \geq 0$ donc $u_{n-1}^2 + n - 1 \geq n - 1 \geq 0$ et, par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ , $\sqrt{u_{n-1}^2 + n - 1} \geq \sqrt{n - 1}$. Ainsi, $u_n \geq \sqrt{n - 1}$.
- b. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n - 1} = +\infty$, par le théorème de comparaison, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
5. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = k$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

D'autre part, en reconnaissant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_{n+1-1}^2 - u_0^2 = u_n^2$$

car $u_0 = 0$. Ainsi, on conclut que $u_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- c. Par propriété, $n(n-1) = n^2 - n \sim n^2$ donc, par quotient, $\frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$ et, par compatibilité avec les puissances, $u_n \sim \sqrt{\frac{n^2}{2}}$ i.e. comme $n \geq 0$, $u_n \sim \frac{n}{\sqrt{2}}$.