

Devoir surveillé n°6

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

a. $f : x \mapsto x + e^x$

b. $f : x \mapsto xe^x$

c. $f : x \mapsto (2 + \cos(x))^3$

d. $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x})$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .

a. $f : x \mapsto x + e^x$

b. $f : x \mapsto \frac{x^4 + x^2}{3}$

c. $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$

d. $f : x \mapsto xe^{x^2}$

3. Dans chaque cas, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a .

a. $f : x \mapsto x + e^x, a = -\infty$ b. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}, a = +\infty$ c. $f : x \mapsto \ln(x)e^x, a = 0^+$.

Exercice 2. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + t = 0\}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une famille génératrice.
2. Déterminer une base de F et donner la dimension de F .
3. On considère l'ensemble $G = \{(-a - b, -2a + 2b, a - b, 2a) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
 - a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une famille génératrice.
 - b. Déterminer la dimension de G .
 - c. Montrer que $G \subset F$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

On cherchera une solution particulière sous la forme $g : x \mapsto axe^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

On considère deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 1 boule rouge et 3 boules noires et l'urne U_2 contient 3 boules rouges et 2 boules noires.

On s'intéresse à l'expérience suivante. On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne U_1 . On note sa couleur et on la remet dans l'urne. On effectue ensuite une succession de tirages d'une boule avec remise de telle sorte que :

- si, lors d'un tirage, on obtient une boule rouge alors le tirage suivant est effectué dans l'urne U_1 ;
- si, lors d'un tirage, on obtient une boule noire alors le tirage suivant est effectué dans l'urne U_2 .

Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne où elle a été tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'évènement « La boule obtenue lors du n -ième tirage est rouge ».

- a. Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(\overline{R_1})$.
 - b. Déterminer $\mathbf{P}(R_2 | R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 | \overline{R_1})$.
 - c. Dédurre des questions précédentes la probabilité de R_2 .
 - d. Si la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit également rouge ?
- a. Déterminer la probabilité que les 3 premières boules tirées soient rouges.
 - b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges.
 - c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire lors des n premiers tirages ?
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbf{P}(R_n)$.
 - a. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n).$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = p_n - \frac{4}{9}$.

Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de u_n puis de p_n en fonction de n .
- d. Déterminer la limite de (p_n) et donner une interprétation du résultat obtenu.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \geq 0$.
2. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = n.$$

- b. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n \geq 0$.
- c. En déduire que (u_n) est croissante.
- d. En utilisant le résultat de la question **3.a.**, démontrer par l'absurde que (u_n) diverge et en déduire la limite de (u_n) .
4. a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{n-1}$.
- b. Retrouver, par une autre méthode, le résultat de la question **3.d.**.
5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$, démontrer que

$$u_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de u_n en fonction de n .
- c. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.