Devoir surveillé n°6

Durée : 2h15

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \longmapsto x^5 + x^3 + x$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - x}{12}$

c. $f : x \longmapsto x\cos(x)$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x+1}$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \longmapsto x^5 + x^3 + x$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - x}{12}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^4+1}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

3. Dans chaque cas, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f : x \longmapsto x\ln(x)$, $a = +\infty$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$, $a = 0^+$ **c.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $a = -\infty$.

Solution.

1. a. Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1}$.

b. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{12}(\mathrm{e}^x - x)$ donc $\boxed{f'(x) = \frac{1}{12}(\mathrm{e}^x - 1)}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x))$ donc $\boxed{f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)}$.

d. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times (\mathrm{e}^x+1) - (x+1) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}$.

2. a. La fonction $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{12}(\mathrm{e}^x - x)$ donc la fonction $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{12}(\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2})}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4x^3}{x^4+1}$ donc $F : x \longmapsto \ln(|x^4+1|)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $x^4+1 > 0$ donc $\boxed{F : x \longmapsto \ln(x^4+1)}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

d. La fonction $\boxed{F : x \longmapsto -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0}$.

c. Pour tout réel $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$ et, ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty}$.

Exercice 2. On considère l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

2. Déterminer une base de F et donner sa dimension.

3. On considère les vecteurs $u = (1,2,-1)$ et $v = (2,2,2)$ et on pose $G = \mathrm{Vect}(u,v)$.

a. Montrer que G est inclus dans F.

b. Déterminer la dimension de G.

c. Que peut-on en conclure ?

Solution.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x - 2y\} \\ &= \{(x,y,3x-2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,3) + y(0,1,-2) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

donc, en posant $e_1 = (1,0,3)$ et $e_2 = (0,1,-2)$, on a $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Ainsi, <u>$F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et (e_1,e_2) en est une famille génératrice</u>.

2. Comme les deux vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, la famille (e_1,e_2) est libre donc $\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base de } F}$.

On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 2}$.

3. a. Comme $3\times1 - 2\times2 - (-1) = 0$, $u \in F$ et, comme $3\times2 - 2\times2 - 2 = 0$, $v \in F$. Par propriété, on en déduit que $\mathrm{Vect}(e_1,e_2) \subset F$ i.e. $\boxed{G \subset F}$.

b. Comme les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, (u,v) est libre donc (u,v) est une base de G et ainsi $\boxed{\dim(G) = 2}$.

c. Comme $G \subset F$ et $\dim(F) = \dim(G)$, par propriété, $\boxed{F = G}$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = \mathrm{e}^{x}$.

On cherchera une solution particulière sous la forme $g : x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Solution. L'équation homogène associée à (E) est $(H) : y' - 3y = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est $\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{3x} |\ C \in \mathbb{R}\}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : x \longmapsto a\,\mathrm{e}^{x}$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$h'(x) - 3h(x) = a\,\mathrm{e}^{x} - 3a\,\mathrm{e}^{x} = -2a\,\mathrm{e}^{x}.$$

Ainsi, pour que h soit solution de (E), il suffit que $-2a = 1$ i.e. $a = -\frac{1}{2}$.
On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \{x \longmapsto -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} + C\,\mathrm{e}^{3x} |\ C \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 4. Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Un club d'échec compte 10 membres : 6 filles et 4 garçons.

1. **a.** On choisit un membre du club au hasard.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une fille ?
   b. On choisit successivement 4 membres différents du club.
   Quelle est la probabilité de choisir 4 filles ?
2. Pour participer à un concours, le club doit former une équipe de trois membres.
   a. Combien d'équipes différentes est-il possible de former ?
   b. On forme une équipe au hasard et on choisit un membre de l'équipe au hasard comme capitaine. On considère les évènements :
   - A : « l'équipe est composée de 3 filles » ;
   - B : « l'équipe est composée de 2 filles et 1 garçon » ;
   - C : « l'équipe est composée de 2 garçons et 1 fille » ;
   - D : « l'équipe est composée de 3 garçons » ;
   - E : « le capitaine de l'équipe est une fille ».

   Montrer que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(C) = \dfrac{3}{10}$.
   c. En utilisant la formule de probabilités totales, calculer la probabilité de E.

Solution.

1. **a.** Par équiprobabilité, la probabilité de choisir une fille est $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
   b. Notons, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, A_i : « le i-ème membre choisi est une fille ». Alors, par la formule des probabilités composées,

   $$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de choisir 4 filles est } \frac{1}{14}}$.
2. **a.** Le nombre d'équipes qu'on peut former est

   $$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 8}{6} = 120.$$

   Il y a donc $\boxed{120 \text{ équipes possibles}}$.

b. Comme $\text{Card}(A) = \binom{6}{3} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$, par équiprobabilité, $\boxed{\mathbf{P}(A) = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}}$.

De même, $\text{Card}(B) = \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = \dfrac{6 \times 5}{2} \times 4 = 60$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B) = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}}$ et $\text{Card}(C) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = \dfrac{4 \times 3}{2} \times 6 = 36$ donc $\boxed{\mathbf{P}(C) = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}}$.

c. Comme les évènements A, B, C et D forment un système complet d'évènements, par la formule de probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(E \mid A) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(E \mid B) + \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(E \mid C) + \mathbf{P}(D)\mathbf{P}(E \mid D) \\
&= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \mathbf{P}(D) \times 0 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{36}{60}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(E) = \dfrac{3}{5}}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{nu_n + 1}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est strictement positif.

2. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

3. **a.** Démontrer que (u_n) est décroissante.

b. En déduire que (u_n) converge. On ne demande pas de déterminer la limite de (u_n).

4. **a.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+2} - u_{n+1} = \frac{1 - 2u_n}{(n+2)(nu_n + 1)}$$

et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

c. En utilisant un raisonnement par disjonction de cas, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

d. En déduire la limite de (u_n).

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$.

• **Initialisation.** Comme $u_0 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $u_n > 0$. Dès lors, comme $n \geqslant 0$, $nu_n \geqslant 0$ donc $nu_n + 1 > 0$. Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{nu_n + 1}$ existe et, de plus, comme $u_n > 0$ et $nu_n + 1 > 0$, $u_{n+1} > 0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est strictement positif.

2. Par définition, $u_1 = \dfrac{u_0}{0u_0+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{2}}$ et $u_2 = \dfrac{u_1}{1u_1+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{1}{3}}$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{nu_n+1} - u_n = \frac{u_n - (nu_n+1)u_n}{nu_n+1} = \frac{-nu_n^2}{nu_n+1}.$$

Or, $u_n > 0$ et $n \geqslant 0$ donc $nu_n + 1 \geqslant 1$ et $-nu_n^2 \leqslant 0$ donc, par quotient, $\dfrac{-nu_n^2}{nu_n+1} \leqslant 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (d'après la question **1.**) donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

4. **a.** La suite (u_n) est décroissante et $u_0 = \frac{1}{2}$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{1}{2}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{1}{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{u_n}{nu_n+1} = \frac{nu_n + 1 - (n+2)u_n}{nu_n+1} = \frac{nu_n + 1 - nu_n - 2u_n}{nu_n+1}$$

donc $\boxed{\dfrac{1}{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{1-2u_n}{nu_n+1}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc $1 - 2u_n \geqslant 0$ et $u_n > 0$ donc $(n+2)(nu_n+1) > 0$.
Ainsi, par quotient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+2} - u_{n+1} \geqslant 0$ et on conclut donc que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$ alors $u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{n+1} = 1$ donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Si $n > 0$ alors $n - 1 \geqslant 0$ donc, d'après la question précédente,

$$u_n = u_{(n-1)+1} \leqslant \frac{1}{(n-1)+2}$$

i.e. $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

d. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.