

## Devoir surveillé n°6

Durée : 2h15

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.  
Toute sortie anticipée est interdite.

### Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On ne demande pas de justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

a. $f : x \mapsto x^5 + x^3 + x$	b. $f : x \mapsto \frac{e^x - x}{12}$
c. $f : x \mapsto x \cos(x)$	d. $f : x \mapsto \frac{x + 1}{e^x + 1}$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

a. $f : x \mapsto x^5 + x^3 + x$	b. $f : x \mapsto \frac{e^x - x}{12}$
c. $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^4 + 1}$	d. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

3. Dans chaque cas, déterminer, en détaillant, la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

a.  $f : x \mapsto x \ln(x)$ ,  $a = +\infty$     b.  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ ,  $a = 0^+$     c.  $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$ ,  $a = -\infty$ .

**Exercice 2.** On considère l'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer une famille génératrice.
2. Déterminer une base de  $F$  et donner sa dimension.
3. On considère les vecteurs  $u = (1, 2, -1)$  et  $v = (2, 2, 2)$  et on pose  $G = \text{Vect}(u, v)$ .
  - a. Montrer que  $G$  est inclus dans  $F$ .
  - b. Déterminer la dimension de  $G$ .
  - c. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : y' - 3y = e^x$ .

On cherchera une solution particulière sous la forme  $g : x \mapsto a e^x$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** Dans cet exercice, toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Un club d'échec compte 10 membres : 6 filles et 4 garçons.

1.
  - a. On choisit un membre du club au hasard.  
Quelle est la probabilité que ce membre soit une fille ?
  - b. On choisit successivement 4 membres différents du club.  
Quelle est la probabilité de choisir 4 filles ?
2. Pour participer à un concours, le club doit former une équipe de trois membres.
  - a. Combien d'équipes différentes est-il possible de former ?
  - b. On forme une équipe au hasard et on choisit un membre de l'équipe au hasard comme capitaine. On considère les événements :
    - $A$  : « l'équipe est composée de 3 filles » ;
    - $B$  : « l'équipe est composée de 2 filles et 1 garçon » ;
    - $C$  : « l'équipe est composée de 2 garçons et 1 fille » ;
    - $D$  : « l'équipe est composée de 3 garçons » ;
    - $E$  : « le capitaine de l'équipe est une fille ».Montrer que  $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$ ,  $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$  et  $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{10}$ .
  - c. En utilisant la formule de probabilités totales, calculer la probabilité de  $E$ .

**Exercice 5.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{nu_n + 1}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et est strictement positif.
2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
3.
  - a. Démontrer que  $(u_n)$  est décroissante.
  - b. En déduire que  $(u_n)$  converge. On ne demande pas de déterminer la limite de  $(u_n)$ .
4.
  - a. Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \frac{1}{2}$ .
  - b. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n+2} - u_{n+1} = \frac{1 - 2u_n}{(n+2)(nu_n + 1)}$$

et en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ .

- c. En utilisant un raisonnement par disjonction de cas, démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

- d. En déduire la limite de  $(u_n)$ .