Devoir surveillé n°6

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x \in D$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur D.

a. $f : x \longmapsto x^3 + 4x^2 - 5x + 3,\ D = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{2x^3 + 3x^2}{12},\ D = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto x\ln(x),\ D = \mathbb{R}_+^*$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2},\ D = \mathbb{R}$

e. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\sin(x)},\ D = \mathbb{R}$ **f.** $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}\right),\ D = \mathbb{R}_+^*$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

a. $f : x \longmapsto x^3 + x + 4,\ I = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^4+1}{12},\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{2x},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1},\ I = \mathbb{R}$

e. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^3},\ I =]-2\,;+\infty[$ **f.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}},\ I = \left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$

3. Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = 3n^3+2n-1$ **2.** $u_n = \dfrac{2n}{3n^2+1}$ **3.** $u_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ **4.** $u_n = \mathrm{e}^{\sin(\frac{1}{n})} - 1$

Solution.

1. a. Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 8x - 5}$.

b. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{6x^2+6x}{12}$ i.e. $\boxed{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}$.

c. Pour tout réel $x > 0$,$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}$ i.e. $\boxed{f'(x) = \ln(x) + 1}$.

d. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+2) - (x+1) \times 2x}{(x^2+2)^2}$ i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2+2)^2}}$.

e. Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = (1 + \cos(x))\,\mathrm{e}^{x+\sin(x)}}$.

f. Pour tout réel x,

$$f(x) = \ln(x\sqrt{x}) - \ln(x+1) = \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1) = \frac{3}{2}\ln(x) - \ln(x+1)$$

donc

$$f'(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1) - 2x}{2x(x+1)}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{x+3}{2x(x+1)}}$.

2. a. Une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x}$.

b. Une primitive de f sur I est $F : x \longmapsto \frac{1}{12}(\frac{x^5}{5} + x)$ soit $\boxed{F : x \longmapsto \frac{x^5}{60} + \frac{x}{12}}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{3}{2} \times 2\,\mathrm{e}^{2x}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{2x}}$.

d. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \ln(x^2+1)}$.

e. Une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{1}{2(x+2)^2}}$.

f. Pour tout réel $x > -\frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}$ donc une primitive de f sur I est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}}$.

3. a. Comme (u_n) est polynomiale, $\boxed{u_n \sim 3n^3}$.

b. De même, $u_n \sim \frac{2n}{3n^2} \sim \frac{2}{3n}$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{2}{3n}}$.

c. Étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par théorème, $\ln(1 + \frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$ donc, par produit, $u_n \sim n \times \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ et ainsi $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.

d. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$. Ainsi, par théorème, $\mathrm{e}^{\sin(\frac{1}{n})} - 1 \sim \sin(\frac{1}{n})$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par théorème, $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et donc, par transitivité, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.

Exercice 2. On considère le polynôme $P = 2X^3 + 3X^2 - 11X - 6$.

1. Montrer que 2 est une racine de P.

2. Factoriser le polynôme P.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x.

Solution.

1. $P(2) = 2 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 11 - 6 = 16 + 12 - 22 - 6 = 0$ donc $\boxed{2 \text{ est une racine de } P}$.

2. Comme P est de degré 3 et comme 2 est racine de P, il existe des réels a, b et c tels que $P = (X-2)(aX^2 + bX + c)$. Or,

$$(X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-2aX^2-2bX-2c = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$$

donc, par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = -11 \\ -2c = -6 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ c = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{P = (X-2)(2X^2+7X+3)}$.

3. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$P(x) = 0 \iff (x-2)(2x^2+7x+3) = 0 \iff x-2 = 0 \text{ ou } 2x^2+7x+3 = 0$$

D'une part, $x-2=0$ si et seulement si $x=2$. D'autre part, le discriminant de $2x^2+7x+3$ est $\Delta = 7^2 - 4\times 2\times 3 = 25 > 0$ donc l'éqaution $2x^2+7x+3=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{2\times 2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } P(x) = 0 \text{ est } \{2\,;-3\,;-\tfrac{1}{2}\}}$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 10y = 9t\,\mathrm{e}^{-2t}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (H) : $y'' - 2y' + 10y = 0$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $t \longmapsto (at+b)\,\mathrm{e}^{-2t}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Solution.

1. L'équation caractéristique associée à (H) est (C) : $x^2 - 2x + 10 = 0$. Le discriminant de $x^2 - 2x + 10$ est $\delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 10 = -36 < 0$ donc l'équation (C) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{36}}{2\times 1} = 1 - 3\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \overline{x_1} = 1 + 3\,\mathrm{i}\,.$$

Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est

$$\boxed{\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\,t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $g : t \longmapsto (at+b)\,\mathrm{e}^{-2t}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel t,

$$g'(t) = a\,\mathrm{e}^{-2t} + (at+b)(-2\,\mathrm{e}^{-2t}) = (-2at + a - 2b)\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

De même, g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g''(t) = (-2a)\,\mathrm{e}^{-2t} + (-2at + a - 2b)(-2\,\mathrm{e}^{-2t}) = (4at - 4a + 4b)\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

On en déduit que, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} g''(t) - 2g'(t) + 10g(t) &= (4at - 4a + 4b)\,\mathrm{e}^{-2t} - 2(-2at + a - 2b)\,\mathrm{e}^{-2t} + 10(at+b)\,\mathrm{e}^{-2t} \\ &= (18at - 6a + 18b)\,\mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que g soit solution de (E), il suffit que $18a = 9$ et $18b - 6a = 0$ i.e. $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{6}$. Dès lors, $\boxed{g : t \longmapsto (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{6})\,\mathrm{e}^{-2t} \text{ est une solution de } (E)}$.

3. Par théorème, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\{t \longmapsto \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{6}\right) \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{t}(A\cos(3t) + B\sin(3t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Exercice 4. Dans cet exercice, tous les résultats doivent être donnés sous forme de fractions irréductibles.

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires.

1. Dans cette question, on suppose qu'on tire simultanément 3 boules dans l'urne.

a. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges.

b. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules noires.

c. Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur.

d. Déterminer la probabilité d'obtenir 1 boule rouge et 2 boules noires.

2. Dans cette question, on suppose qu'on effectue successivement et sans remise 2 tirages d'une boule dans l'urne.. On note R_1 l'évènement « Obtenir une boule rouge au premier tirage » et R_2 l'évènement « Obtenir une boule rouge au second tirage ».

a. Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(\overline{R_1})$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1})$.

c. Calculer $\mathbf{P}(R_2)$.

d. Sachant que la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule blanche au premier tirage ?

Solution.

1. On modélise l'expérience par l'équiprobabilité sur l'ensemble des $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3!} = \frac{10\times9\times8}{6} = 120$ tirages possibles.

a. Notons A : « Tirer 3 boules rouges ». Alors, $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{4}{3}}{60} = \frac{4}{120}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{1}{30}}$.

b. Notons B : « Tirer 3 boules noires ». Alors, $\mathbf{P}(B) = \frac{\binom{6}{3}}{120} = \frac{\frac{6\times4}{6}}{120} = \frac{20}{120}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}}$.

c. On cherche la probabilité de $A \cup B$. Or, A et B sont incompatibles donc $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{5}}$.

d. Notons C : « Tirer un boule rouge et 2 boules noires ». Alors, $\mathbf{P}(C) = \frac{\binom{4}{1}\times\binom{6}{2}}{120} = \frac{4\times\frac{6\times5}{2}}{120} = \frac{60}{120}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}}$.

2. a. Par équiprobabilité des tirages, $\mathbf{P}(R_1) = \frac{4}{10}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(R_1) = \frac{2}{5}}$. De même, $\mathbf{P}(\overline{R_1}) = \frac{6}{10}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(\overline{R_1}) = \frac{3}{5}}$.

b. Par équiprobabilité, $\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{9}$ i.e. $\boxed{\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{1}{3}}$ et, de même, $\boxed{\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1}) = \frac{4}{9}}$.

c. Comme R_1 et $\overline{R_1}$ forment un système complet d'évènements, d'après la formule de probabilités totales,

$$\mathbf{P}(R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) + \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{18}{45}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(R_2) = \frac{2}{5}}$.

d. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(\overline{R_1} \mid R_2) = \frac{\mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1})}{\mathbf{P}(R_2)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{4}{9}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(\overline{R_1} \mid R_2) = \frac{2}{3}}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{16}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est positif.

2. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

3. **a.** Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 1.

b. Déduire de la question précédente que (u_n) est croissante.

c. Conclure que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. **a.** Justifier que (u_n) est minorée par $\frac{1}{16}$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{u_n}}(1 - u_n)$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(1 - u_n)$.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

e. Utiliser ce qui précède pour retrouver la limite de (u_n) par une méthode différente de celle de la question **3.c.**.

Solution.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geqslant 0$ ».

Initialisation. Par définition, u_0 existe et vaut $\frac{1}{16} \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et est positif donc $\sqrt{u_n}$ est bien définie i.e. u_{n+1} existe. De plus, $\sqrt{u_n} \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et est positif}}$.

2. $u_1 = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}}$ i.e. $\boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$ et $u_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$ i.e. $\boxed{u_2 = \frac{1}{2}}$.

3. **a.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. Par définition, $u_0 = \frac{1}{16} \leqslant 1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Alors, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{1}$ i.e. $u_{n+1} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$ i.e. $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } 1.}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) = u_{n+1}(1 - u_{n+1})$. Or, d'après la question **1.**, $u_{n+1} \geqslant 0$ et, d'après la question **3.a.**, $u_{n+1} \leqslant 1$ donc $1 - u_{n+1} \geqslant 0$. Par produit, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \leqslant 1}$.

D'une part, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \geqslant \frac{1}{16}$ (car (u_n) est minorée par $\frac{1}{16}$) et $\lim\limits_{x \to \ell} \sqrt{x} = \sqrt{\ell}$ donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell}$ i.e.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{\ell}$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = \sqrt{\ell}$. Comme $\ell \geqslant \frac{1}{16}$, $\sqrt{\ell} \neq 0$ donc, en divisant par $\sqrt{\ell}$, il vient $\sqrt{\ell} = 1$ i.e. $\ell = 1$.

Ainsi, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

4. **a.** Comme la suite (u_n) est croissante, (u_n) est minorée par son premier terme donc $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } \frac{1}{16}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$1 - u_{n+1} = 1 - \sqrt{u_n} = \frac{(1-\sqrt{u_n})(1+\sqrt{u_n})}{1+\sqrt{u_n}} = \frac{1^2 - \sqrt{u_n}^2}{1+\sqrt{u_n}}$$

donc $\boxed{1 - u_{n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{u_n}}(1-u_n)}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **3.c.**, $u_n \leqslant \frac{1}{16}$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{\frac{1}{16}}$ i.e. $\sqrt{u_n} \geqslant \frac{1}{4}$. Dès lors, $1+\sqrt{u_n} \geqslant \frac{5}{4}$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{1+\sqrt{u_n}} \leqslant \frac{4}{5}$. Comme (u_n) est majorée par 1, $1 - u_n \geqslant 0$ donc on en déduit que $\frac{1}{1+\sqrt{u_n}}(1-u_n) \leqslant \frac{4}{5}(1-u_n)$ i.e., d'après la question précédente, $\boxed{1 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(1-u_n)}$.

d. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathbf{R}(n)$: « $1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Initialisation. Par définition, $1 - u_0 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} =$ et $\frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{15}{16} \times 1 = \frac{15}{16}$ donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ est vraie. Alors, $1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc, en multipliant par $\frac{4}{5} > 0$, on en déduit que $\frac{4}{5}(1-u_n) \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$. Or, par la question précédente, $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(1-u_n)$ donc $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n.}$.

e. Comme (u_n) est majorée par 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \geqslant 0$. Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Or, $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.