Devoir surveillé n°6

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ pour $x \in D$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur D.

a. $f : x \longmapsto x^3 + 4x^2 - 5x + 3,\ D = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{2x^3 + 3x^2}{12},\ D = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto x\ln(x),\ D = \mathbb{R}_+^*$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2},\ D = \mathbb{R}$

e. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x+\sin(x)},\ D = \mathbb{R}$ **f.** $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}\right),\ D = \mathbb{R}_+^*$

2. Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f sur I.

a. $f : x \longmapsto x^3 + x + 4,\ I = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto \dfrac{x^4+1}{12},\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto 3\,\mathrm{e}^{2x},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1},\ I = \mathbb{R}$

e. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^3},\ I =]-2\,;+\infty[$ **f.** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}},\ I = \left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$

3. Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = 3n^3+2n-1$ **2.** $u_n = \dfrac{2n}{3n^2+1}$ **3.** $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ **4.** $u_n = \mathrm{e}^{\sin(\frac{1}{n})}-1$

Exercice 2. On considère le polynôme $P = 2X^3 + 3X^2 - 11X - 6$.

1. Montrer que 2 est une racine de P.

2. Factoriser le polynôme P.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + 10y = 9t\,\mathrm{e}^{-2t}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(H) : y'' - 2y' + 10y = 0$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $t \longmapsto (at+b)\,\mathrm{e}^{-2t}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4. Dans cet exercice, tous les résultats doivent être donnés sous forme de fractions irréductibles.

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires.

1. Dans cette question, on suppose qu'on tire simultanément 3 boules dans l'urne.

- **a.** Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges.
- **b.** Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules noires.
- **c.** Déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur.
- **d.** Déterminer la probabilité d'obtenir 1 boule rouge et 2 boules noires.

2. Dans cette question, on suppose qu'on effectue successivement et sans remise 2 tirages d'une boule dans l'urne. On note R_1 l'évènement « Obtenir une boule rouge au premier tirage » et R_2 l'évènement « Obtenir une boule rouge au second tirage ».

- **a.** Déterminer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(\overline{R_1})$.
- **b.** Déterminer $\mathbf{P}(R_2 \mid R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2 \mid \overline{R_1})$.
- **c.** Calculer $\mathbf{P}(R_2)$.
- **d.** Sachant que la seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule noire au premier tirage ?

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{16}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est positif.

2. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

3.
- **a.** Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 1.
- **b.** Déduire de la question précédente que (u_n) est croissante.
- **c.** Conclure que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4.
- **a.** Justifier que (u_n) est minorée par $\frac{1}{16}$.
- **b.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + \sqrt{u_n}}(1 - u_n)$.
- **c.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(1 - u_n)$.
- **d.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leqslant \frac{15}{16} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
- **e.** Utiliser ce qui précède pour retrouver la limite de (u_n) par une méthode différente de celle de la question **3.c.**.