Devoir surveillé n°5

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f(x) = -x^2 + 5x,\ a = +\infty$ **b.** $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2},\ a = 0^+$

c. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1},\ a = +\infty$ **d.** $f(x) = \sqrt{x}(1 - \ln(x)),\ a = +\infty$

2. Dans chaque cas, on admet que f est dérivable sur I. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On simplifiera au maximum les résultats lorsque cela est possible.

a. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x,\ I = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto x\ln(x) - x,\ I =]0\,;+\infty[$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\ I = \mathbb{R}^*$

3. Dans chaque cas, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a. $f : x \longmapsto \dfrac{x^4 + x + 1}{5},\ I = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)},\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 5)^4},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x},\ I = \mathbb{R}_+^*$

4. On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 3 - 4\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires.

a) $z_3 = z_1 + z_2$ **b)** $z_4 = z_1 z_2$ **c)** $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$ **d)** $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$ **f)** $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$ **g)** $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$ **h)** $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$

Solution.

1. **a.** Pour tout réel x, $f(x) = x(-x+5)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + 5 = -\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$.

c. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x})}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x})} = \dfrac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}}{x(\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x})}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Dès lors, par sommes, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ donc, finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

d. D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln(x) = -\infty$ et finalement, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

2. a. Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^x - 1}$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1$ donc $\boxed{f'(x) = \ln(x)}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$ soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}}$.

d. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

3. a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + x\right)$ soit $\boxed{F : x \longmapsto \dfrac{1}{20}x^5 + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{8}x}$

b. Pour tout réel x, $f(x) = -\underbrace{\left(-\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\right)}_{u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{F : x \longmapsto -\mathrm{e}^{\cos(x)}}$.

c. Une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + 5)^3}$ i.e. $\boxed{F : x \longmapsto -\dfrac{1}{3(\mathrm{e}^x + 5)^3}}$.

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \underbrace{\dfrac{1}{x}\ln(x)}_{u'(x)u(x)}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\boxed{F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(x)^2}$.

4. a. $z_3 = 1 + \mathrm{i} + (3 - 4\,\mathrm{i})$ donc $\boxed{z_3 = 4 - 3\,\mathrm{i}}$.

b. $z_4 = (1 + \mathrm{i})(3 - 4\,\mathrm{i}) = 3 - 4\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} + 4$ donc $\boxed{z_4 = 7 - \mathrm{i}}$

c. $z_5 = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1^2 + 1^2}$ donc $\boxed{z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}}$.

d. $z_6 = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{3 - 4\,\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + \mathrm{i})(3 + 4\,\mathrm{i})}{3^2 + (-4)^2} = \dfrac{3 + 4\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - 4}{25}$ donc $\boxed{z_6 = -\dfrac{1}{25} + \dfrac{7}{25}\,\mathrm{i}}$.

e. $z_7 = \overline{1 + \mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_7 = 1 - \mathrm{i}}$.

f. $z_8 = \overline{(1 + \mathrm{i}) - (3 - 4\,\mathrm{i})} = \overline{-2 + 5\,\mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_8 = -2 - 5\,\mathrm{i}}$.

g. $z_9 = \dfrac{1}{\overline{3 - 4\,\mathrm{i}}} = \dfrac{1}{3 + 4\,\mathrm{i}} = \dfrac{3 - 4\,\mathrm{i}}{3^2 + 4^2}$ donc $\boxed{z_9 = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}\,\mathrm{i}}$.

h. $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{3 - 4\,\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{3 - 4\,\mathrm{i}}}{\overline{1 + \mathrm{i}}} = \dfrac{3 + 4\,\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{(3 + 4\,\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{1^2 + (-1)^2} = \dfrac{3 + 3\,\mathrm{i} + 4\,\mathrm{i} - 4}{2}$ donc $\boxed{z_{10} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n le point d'affixe z_n.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3.

2. a. Écrire $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1}{2^{n-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la distance $\mathrm{O}A_n$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Solution.

1. Par définition,

- $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times 8$ i.e. $\boxed{z_1 = 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}$;
- $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times (2+2\mathrm{i}\sqrt{3}) = \dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{1+2\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{2}$ i.e. $\boxed{z_2 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$;
- $z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times (-1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}{4} = \dfrac{-1-3}{4}$ i.e. $\boxed{z_3 = -1}$.

2. a. Posons $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$. Alors,

$$|z| = \left|\frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Dès lors,

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

et donc $\boxed{z = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $z_n = \frac{1}{2^{n-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ ».

Initialisation. D'une part, $z_0 = 8$ et, d'autre part, $\frac{1}{2^{0-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\pi}{3}} = \frac{1}{2^{-3}} \times 1 = 2^3 = 8$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \frac{1}{2^{n-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-3}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2^{(n+1)-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{3}}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ z_n = \frac{1}{2^{n-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}}$.

3. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{O}A_n = |z_n| = \left|\frac{1}{2^{n-3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}\right| = \frac{1}{2^{n-3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1-3} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = \dfrac{1}{2}u_n$ donc on conclut que $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3.

1. a. Déterminer le signe du trinôme $P = X^2 - 5X + 4$.

b. En déduire que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4 \geqslant 0$ est $]-\infty\,;0] \cup [\ln(4)\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{9}{2+\mathrm{e}^x} + x$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 4}{(2+\mathrm{e}^x)^2}$.

c. En utilisant le résultat de la question **1.b.**, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

e. La fonction f admet-elle des extremums locaux ? Admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}$?

f. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.
Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale.

Solution.

1. a. Le discriminant de P est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 4 = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times 1} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $P \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;1]\cup[4\,;+\infty[$ et $P \leqslant 0$ sur $[1\,;4]$.

b. On peut remarquer que, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4 \geqslant 0 \Longleftrightarrow P(\mathrm{e}^{x}) \geqslant 0$$

donc, par la question précédente,

$$\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+4 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x} \leqslant 1 \text{ ou } \mathrm{e}^{x} \geqslant 4 \Longleftrightarrow x \leqslant \ln(1) \text{ ou } x \geqslant \ln(4) \Longleftrightarrow x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \ln(4).$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4 \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est }]-\infty\,;0]\cup[\ln(4)\,;+\infty[}$.

2. a. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim \dfrac{9}{2+\mathrm{e}^{x}} = 0$. Ainsi, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\mathrm{e}^{x} = 2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9}{2+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{9}{2}$. Ainsi, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

b. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 9\times\left(-\frac{\mathrm{e}^{x}}{(2+\mathrm{e}^{x})^2}\right)+1 = \frac{-9\mathrm{e}^{x}+(1+\mathrm{e}^{x})^2}{(2+\mathrm{e}^{x})^2} = \frac{-9\mathrm{e}^{x}+4+4\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}{(2+\mathrm{e}^{x})^2}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+4}{(2+\mathrm{e}^{x})^2}}$.

c. Pour tout réel x, $(2+\mathrm{e}^{x})^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+4$. On déduit alors de la question **1.b.** que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in\,]-\infty\,;0]\cup[\ln(4)\,;+\infty[$ donc on conclut que f est croissante sur $]-\infty\,;0]$, décroissante sur $[0\,;\ln(4)]$ et croissante sur $[\ln(4)\,;+\infty[$.

d. On aboutit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln(4)$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

e. D'après le tableau de variation, $\boxed{f \text{ admet un maximum local en } 0 \text{ valant } 3}$ et elle admet $\boxed{\text{un minimum local en } \ln(4) \text{ valant } \frac{3}{2}+\ln(4)}$.
En revanche, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f n'a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}$.

f. La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a si et seulement si $f'(a) = 0$. Or, par l'étude précédente, $f'(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $a = \ln(4)$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{C} \text{ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses } 0 \text{ et } \ln(4)}$.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. En utilisant des matrices, résoudre le système (S) : $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système

$$(T) \begin{cases} x - y - z = a & L_1 \\ x - y - 2z = b & L_2 \\ 2x - y + z = c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$(T) \iff \begin{cases} x - y - z = a & L_1 \\ -z = b - a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + 3z = c - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = a & L_1 \\ y + 3z = c - 2a & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -z = b - a & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système ainsi échelonné possède 3 pivots donc il est de rang 3. Ainsi, A est une matrice carrée d'ordre 3 qui est de rang 3 donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$. De plus,

$$(T) \iff \begin{cases} x - y = a + (a - b) \\ y = c - 2a - 3(a - b) \\ z = a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2a - b + (-5a + 3b + c) \\ y = -5a + 3b + c \\ z = a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3a + 2b + c \\ y = -5a + 3b + c \\ z = a - b \end{cases}$$

donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. L'écriture matricielle du système (S) est $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme A est inversible, (S) admet une unique solution donnée par

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } (-3, -6, 2)}$.

Exercice 5. On considère la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ et l'équation (E) : $X = MX + C$ d'inconnue X une matrice de taille 2×1.

a. Déterminer la matrice N telle que (E) soit équivalente à $NX = C$.

b. Justifier que N est inversible et déterminer N^{-1}.

c. En déduire que l'unique solution de (E) est la matrice $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 10$, $b_0 = 20$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + 3 \\ b_{n+1} = 6a_n + 3b_n + 10 \end{cases}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = X_n - V$.

a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n + C$ et, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = MY_n$. (On rappelle que $V = MV + C$.)

b. On pose $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Vérifier que P est inversible et que $M = PDP^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

d. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = M^nY_0$.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n en fonction de n puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.

Solution.

1. a. L'équation (E) équivaut à $X - MX = C$ c'est-à-dire $(I_2 - M)X = C$ donc $N = I_2 - M$ i.e. $\boxed{N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}$.

b. Comme $\det(N) = (-1) \times (-2) - (-1) \times (-6) = -4 \neq 0$, la matrice N est inversible est $\boxed{N^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}$.

c. Ainsi, (E) équivaut à $X = N^{-1}C = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on conclut que $\boxed{\text{l'unique solution de (E) est bien } V = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + 3 \\ 6a_n + 3b_n + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n \\ 6a_n + 3b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1} = MX_n + C}$.

On en déduit que $Y_{n+1} = X_{n+1} - V = MX_n + C - V$ donc, comme $V = MV + C$, $Y_{n+1} = MX_n + C - (MV + C) = M(X_n - V)$ i.e. $\boxed{Y_{n+1} = MY_n}$.

b. Comme $\det(P) = -\frac{1}{2} \times 1 - 1 \times \frac{1}{3} = -\frac{5}{6} \neq 0$, la matrice P est inversible. De plus,

$P^{-1} = -\frac{6}{5}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ donc

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

i.e. $\boxed{PDP^{-1} = M}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H(n)$: « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation. Comme $M^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, $H(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2D^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $H(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}}$.

d. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 \times 5^{n-1} & 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5^{n-1} & 5^{n-1} \\ 6 \times 5^{n-1} & 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} Y_n = M^nY_0 &= \begin{pmatrix} 2 \times 5^{n-1} & 5^{n-1} \\ 6 \times 5^{n-1} & 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 - (-1) \\ 20 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5^{n-1} & 5^{n-1} \\ 6 \times 5^{n-1} & 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{Y_n = \begin{pmatrix} 44 \times 5^{n-1} \\ 132 \times 5^{n-1} \end{pmatrix}}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - V$ donc

$$X_n = Y_n + V = \begin{pmatrix} 44 \times 5^{n-1} \\ 132 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \times 5^{n-1} - 1 \\ 132 \times 5^{n-1} - 2 \end{pmatrix}$$

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 44 \times 5^{n-1} - 1 \text{ et } b_n = 132 \times 5^{n-1} - 2}$.