

## Devoir surveillé n°5

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.  
Toute sortie anticipée est interdite.

### Exercice 1.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer, en détaillant, la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

a. $f(x) = -x^2 + 5x, a = +\infty$	b. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}, a = 0^+$
c. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}, a = +\infty$	d. $f(x) = \sqrt{x}(1 - \ln(x)), a = +\infty$

2. Dans chaque cas, on admet que  $f$  est dérivable sur  $I$ . Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ . On simplifiera au maximum les résultats lorsque cela est possible.

a. $f : x \mapsto e^x - x, I = \mathbb{R}$	b. $f : x \mapsto x \ln(x) - x, I = ]0; +\infty[$
c. $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}, I = \mathbb{R}$	d. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}, I = \mathbb{R}^*$

3. Dans chaque cas, déterminer une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

a. $f : x \mapsto \frac{x^4 + x + 1}{5}, I = \mathbb{R}$	b. $f : x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}, I = \mathbb{R}$
c. $f : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 5)^4}, I = \mathbb{R}$	d. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}, I = \mathbb{R}_+^*$

4. On considère les deux nombres complexes  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 3 - 4i$ . Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires.

a) $z_3 = z_1 + z_2$	b) $z_4 = z_1 z_2$	c) $z_5 = \frac{1}{z_1}$	d) $z_6 = \frac{z_1}{z_2}$
e) $z_7 = \overline{z_1}$	f) $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$	g) $z_9 = \frac{1}{z_2}$	h) $z_{10} = \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$

**Exercice 2.** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On pose  $z_0 = 8$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Déterminer la forme algébrique de  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .
2. a. Écrire  $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$  sous forme exponentielle.  
b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \frac{1}{2^{n-3}} e^{i\frac{n\pi}{3}}$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  la distance  $OA_n$ . Justifier que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

**Exercice 3.**

1. **a.** Déterminer le signe du trinôme  $P = X^2 - 5X + 4$ .
- b.** En déduire que l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'inéquation  $e^{2x} - 5e^x + 4 \geq 0$  est  $]-\infty; 0] \cup [\ln(4); +\infty[$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{9}{2 + e^x} + x$ . On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a.** Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - b.** Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(2 + e^x)^2}$ .
  - c.** En utilisant le résultat de la question **1.b.**, déterminer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - d.** Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - e.** La fonction  $f$  admet-elle des extremums locaux? Admet-elle des extremums globaux sur  $\mathbb{R}$ ?
  - f.** On note  $\mathcal{C}$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à  $\mathcal{C}$  est horizontale.

**Exercice 4.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
2. En utilisant des matrices, résoudre le système  $(S) : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 5.** On considère la matrice  $M$  définie par  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$  et l'équation (E) :  $X = MX + C$  d'inconnue  $X$  une matrice de taille  $2 \times 1$ .
  - a.** Déterminer la matrice  $N$  telle que (E) soit équivalente à  $NX = C$ .
  - b.** Justifier que  $N$  est inversible et déterminer  $N^{-1}$ .
  - c.** En déduire que l'unique solution de (E) est la matrice  $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
2. On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0 = 10$ ,  $b_0 = 20$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + 3 \\ b_{n+1} = 6a_n + 3b_n + 10 \end{cases}.$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  et  $Y_n = X_n - V$ .

- a.** Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = MX_n + C$  et, en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y_{n+1} = MY_n$ . (On rappelle que  $V = MV + C$ .)
- b.** On pose  $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .  
Vérifier que  $P$  est inversible et que  $M = PDP^{-1}$ .
- c.** Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$ .
- d.** On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y_n = M^n Y_0$ .  
Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .