Devoir surveillé n°5

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f(x) = \ln(x) + 5x,\ a = +\infty$ **b.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2},\ a = -\infty$

c. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1},\ a = +\infty$ **d.** $f(x) = x\mathrm{e}^x + x,\ a = -\infty$

2. Dans chaque cas, on admet que f est dérivable sur I. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On simplifiera au maximum les résultats lorsque cela est possible.

a. $f : x \longmapsto \ln(x) - x - 1,\ I =]0\,;+\infty[$ **b.** $f : x \longmapsto \cos^2(x) - \sin^2(x),\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1},\ I = \mathbb{R}$

3. Dans chaque cas, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a. $f : x \longmapsto x^3 + x + 1,\ I = \mathbb{R}$ **b.** $f : x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{x^3},\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{3x}{(x^2+5)^3},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \tan(x),\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

4. On considère les deux nombres complexes $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 5 - 2\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires.

a) $z_3 = z_1 + z_2$ **b)** $z_4 = z_1 z_2$ **c)** $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$ **d)** $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$ **f)** $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$ **g)** $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$ **h)** $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$

Solution.

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

c. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Or, d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

d. Pour tout réel x, $f(x) = x(\mathrm{e}^x + 1)$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

2. **a.** Pour tout $x > 0$, $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} - 1}$.

b. Pour tout réel x, $f'(x)2(-\sin(x))\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) = -4\sin(x)\cos(x)$ donc $\boxed{f'(x) = -2\sin(2x)}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{2 \times 2x \times (x^2+1)}{(x^2+1)^4}$ soit $\boxed{f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^3}}$.

d. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1) - (\mathrm{e}^{2x}-1) \times 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}^{2x}[(\mathrm{e}^{2x}+1) - (\mathrm{e}^{2x}-1)]}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}$$

donc $\boxed{f'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}}$.

a. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x}$.

b. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{3x^2\mathrm{e}^{x^3}}_{u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}}$ donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{F : x \longmapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}}$.

c. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{3}{2} \times \underbrace{\frac{2x}{(x^2+5)^3}}_{\frac{u'(x)}{u(x)^3}}$ donc une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est

$F : x \longmapsto \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2(x^2+5)^2}\right)$ i.e. $\boxed{F : x \longmapsto -\frac{3}{4(x^2+5)^2}}$.

d. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\underbrace{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}$ donc une primitive de la fonction f sur I est $F : x \longmapsto -\ln(|\cos(x)|)$. Or, pour tout $x \in I$, $\cos(x) > 0$ donc $\boxed{F : x \longmapsto -\ln(\cos(x))}$.

3. **a.** $z_3 = 2 + \mathrm{i} + (5 - 2\,\mathrm{i})$ donc $\boxed{z_3 = 7 - \mathrm{i}}$.

b. $z_4 = (2+\mathrm{i})(5-2\,\mathrm{i}) = 10 - 4\,\mathrm{i} + 5\,\mathrm{i} + 2$ donc $\boxed{z_4 = 12 + \mathrm{i}}$

c. $z_5 = \frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{2-\mathrm{i}}{2^2+1^2}$ donc $\boxed{z_5 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}}$.

d. $z_6 = \frac{2+\mathrm{i}}{5-2\,\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(5+2\,\mathrm{i})}{5^2+(-2)^2} = \frac{10+4\,\mathrm{i}+5\,\mathrm{i}-2}{29}$ donc $\boxed{z_6 = \frac{8}{29} + \frac{9}{29}\mathrm{i}}$.

e. $z_7 = \overline{2+\mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_7 = 2 - \mathrm{i}}$.

f. $z_8 = \overline{(2+\mathrm{i}) - (5-2\,\mathrm{i})} = \overline{-3+3\,\mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_8 = -3 - 3\,\mathrm{i}}$.

g. $z_9 = \frac{1}{\overline{5-2\,\mathrm{i}}} = \frac{1}{5+2\,\mathrm{i}} = \frac{5-2\,\mathrm{i}}{5^2+2^2}$ donc $\boxed{z_9 = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}\mathrm{i}}$.

h. $z_{10} = \overline{\left(\frac{5-2\,\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{5-2\,\mathrm{i}}}{\overline{2+\mathrm{i}}} = \frac{5+2\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(5+2\,\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2^2+(-1)^2} = \frac{10+5\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}\,()2}{5}$ donc $\boxed{z_{10} = \frac{8}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}}$.

Exercice 2. On considère le polynôme $P = 2X^3 - 13X^2 + 13X + 10$.

1. Vérifier que 2 est une racine de P.
2. Déduire de la question précédente une factorisation de P.
3. Déterminer l'ensemble des racines réelles de P. (On pourra utiliser le fait que $11^2 = 121$).

Solution.

1. $P(2) = 2 \times 2^3 - 13 \times 2^2 + 13 \times 2 + 10 = 16 - 52 + 26 + 13 = 0$ donc $\boxed{\text{2 est une racine de } P}$.
2. On en déduit qu'il existe des réels a, b et c tels que $P = (X-2)(aX^2 + bX + c)$. Or,

   $$(X-2)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX-2aX^2-2bX-2c = aX^3+(b-2a)X^2+(c-2b)X-2c$$

   donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,

   $$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -13 \\ c - 2b = 13 \\ -2c = 10 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = -5 \end{cases}$$

   Ainsi, $\boxed{P = (X-2)(2X^2 - 9x - 5)}$.
3. Ainsi, pour tout réel x, $P(x) = 0$ si et seulement si $x - 2 = 0$ ou $2x^2 - 9x - 5 = 0$.
   La première équation équivaut à $x = 2$.
   Le discriminant du trinôme $2X^2 - 9X - 5$ est $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

   $$x_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des racines réelles de } P \text{ est } \{2, -\tfrac{1}{2}, 5\}}$.

Exercice 3. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = 2z^2 - \overline{z}^2$.

1. On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}\, b$. Déterminer, en fonction de a et b, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. **a.** Montrer que si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ alors Z est imaginaire pur.
   b. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.
4. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = 0$.

Solution.

1. On a

   $$\begin{aligned} Z &= 2(a + \mathrm{i}\, b)^2 - (a - \mathrm{i}\, b)^2 = 2(a^2 + 2\,\mathrm{i}\, ab - b^2) - (a^2 - 2\,\mathrm{i}\, ab - b^2) \\ &= 2a^2 + 4\,\mathrm{i}\, ab - 2b^2 - a^2 + 2\,\mathrm{i}\, ab + b^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{i}\,(6ab) \end{aligned}$$

   donc $\boxed{\mathrm{Re}(Z) = a^2 - b^2 \text{ et } \mathrm{Im}(Z) = 6ab}$.
2. **a.** Supposons que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$. Alors, avec les notations précédentes, $a = b$ donc $\mathrm{Re}(Z) = a^2 - a^2 = 0$ et donc $\boxed{Z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}}$.
   b. La réciproque est fausse. En effet, si $z = 1 - \mathrm{i}$ alors $a = 1$ et $b = -1$ donc $a \neq b$ mais $\mathrm{Re}(Z) = 1^2 - 1^2 = 0$ et ainsi Z est imaginaire pur.
3. En gardant les mêmes notations,

   $$Z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(Z) = 0 \iff 6ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0 \iff z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$$

   donc $\boxed{\text{l'ensemble des } z \text{ tels que } Z \text{ est réel est } \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}}$.

4. Toujours en gardant les mêmes notations,

$$Z = 0 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 6ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = b^2 \\ a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b^2 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff z = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des complexes } z \text{ tels que } Z = 0 \text{ est } \{0\}}$.

Exercice 4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{z}{|z|}(2 - |z|)$.

On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour tout complexe z non nul, on note $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ où $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)\ [2\pi]$.

1. Montrer que $z' = (2 - r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe a' du point A′, image par f du point A d'affixe $a = 3$.

3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe b' du point B′, image du point B par f.

4. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé de O dont l'image par f est O.

5. Montrer que le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.

Solution.

1. Etant donné que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r = |z|$, $z' = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{r}(2 - r)$ donc $\boxed{z' = (2 - r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}$.

2. L'affixe de A est $a = 3 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$ donc l'affixe de A′ est $a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}(2 - 3)$ soit $\boxed{a' = -1}$.

3. a. Le module de b est $|b| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Dès lors, on écrit

$$b = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

donc $\boxed{b = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$.

b. Dès lors, $b' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}(2 - 2)$ donc $\boxed{b' = 0}$.

4. Un point $M(z)$ différent de O est tel que $f(M) = \mathrm{O}$ si et seulement si

$$z' = 0 \Leftrightarrow (2 - r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2 - r = 0 \Leftrightarrow r = 2 \Leftrightarrow \mathrm{O}M = 2.$$

Ainsi, <u>l'ensemble des points M du plan privé de O tels que $f(M) = \mathrm{O}$ est le cercle de centre O et de rayon 2</u>.

5. Un point $M(z)$ différent de O est tel que $f(M) = M$ si et seulement si

$$z' = z \iff (2 - r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \iff 2 - r = r \iff r = 1 \iff \mathrm{O}M = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des points } M \text{ du plan privé de O tels que } f(M) = \mathrm{O} \text{ est le cercle } \mathscr{C}}$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Démontrer que f est paire.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}(1 - \mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.
   b. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\mathrm{e}^x} = +\infty$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat.
5. En déduire, sans calcul, la limite de f en $-\infty$.

Solution.

1. Étant donné que $\mathrm{e}^0 = 1$, $\boxed{f(0) = 1}$.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}}{\frac{1}{\mathrm{e}^x} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}}{\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} \times \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} \times \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}^2}{1 + \mathrm{e}^x} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x + 1} = f(x).$$

   donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$.
3. a. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{2\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}(\mathrm{e}^x + 1) - 2\sqrt{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}(\mathrm{e}^x + 1) - 2\sqrt{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}(\mathrm{e}^x + 1 - 2\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

   donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}(1 - \mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}}$.

   b. Pour tout réel x, $\sqrt{\mathrm{e}^x} > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - \mathrm{e}^x$.
   Or, pour tout réel x,

$$1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \leqslant 1 \iff x \leqslant 0$$

   donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;0\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[0\,;+\infty\right[$.
   Ainsi, on conclut que $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et décroissante sur } \mathbb{R}_-}$.

   c. Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}$$

   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient et somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\mathrm{e}^x} = +\infty$ donc, par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\mathrm{e}^x}(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}) = +\infty$ et finalement, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.
   On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

   d. Comme f est paire, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe un réel α tel que $A^3 - A = \alpha I_3$.

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x+2z=a \\ -y+z=b \\ x-2y=c \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Solution.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^3 - A = 4I_3}$.

2. Dès lors, $\frac{1}{4}(A^3 - A) = I_3$ donc $A\left(\frac{1}{4}(A^2 - I_3)\right) = I_3$ ce qui permet d'affirmer que $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)}$.

3. L'écriture matrice de (S) est $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc, comme A est inversible,

$$(S) \iff X = A^{-1}B \iff X = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)B$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - b + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{4} \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - \frac{c}{4} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'unique solution de (S) est $(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}, \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{4}, \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - \frac{c}{4})$.

Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = AC_n$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = A^n C_0$.

4. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Calculer PDP^{-1}.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de A^n en fonction n.

6. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Solution.

1. $u_2 = u_1 + 26u_0 = 7$ et $u_3 = u_2 + 2u_1 = 17$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AC_n$ en posant $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $C_n = A^n C_0$ ».

- **Initialisation.** Étant donné que $A^0 = I_2$, $A^0 C_0 = C_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$A^{n+1}C_0 = A(A^nC_0) = AC_n = C_{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_n = A^nC_0}$.

4. **a.** Puisque $\det P = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3 \neq 0$, P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i.e. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b. On en déduit que

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{PDP^{-1} = A}$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

- **Initialisation.** Comme $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

5. Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2^n}{3} & \dfrac{2^n}{3} \\ -\dfrac{(-1)^n}{3} & \dfrac{2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} & \dfrac{2^{n+1} - 2(-1)^n}{3} \\ \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} & \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{pmatrix}}.$$

6. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = C_n = A^nC_0 = A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \times 2^{n+1} + 5 \times (-1)^n + 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n}{3} \\ \dfrac{5 \times 2^n - 5 \times (-1)^n + 2^n + 2 \times (-1)^n}{3} \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} + \times(-1)^n \\ 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - (-1)^n$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$.