Devoir surveillé n°5

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2,\ a = -\infty$ **b.** $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln(x),\ a = 0^+$

c. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ a = +\infty$ **d.** $f(x) = x\,\mathrm{e}^x - x,\ a = +\infty$

2. Dans chaque cas, on admet que f est dérivable sur I. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On simplifiera au maximum les résultats.

a. $f : x \longmapsto x^3 - \sqrt{x},\ I =]0\,;+\infty[$ **b.** $f : x \longmapsto x\sin(x),\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(\cos(x^2)+2)^3},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1},\ I = \mathbb{R}$

3. On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + 3\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires :

a) $z_3 = z_1 + z_2$ **b)** $z_4 = z_1 z_2$ **c)** $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$ **d)** $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$ **f)** $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$ **g)** $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$ **h)** $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A - 2B$, AB, BA et B^2.

Solution.

1. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

c. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$. Or, d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

d. Pour tout réel x, $f(x) = x(\mathrm{e}^x - 1)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. a. Pour tout $x > 0$, $\boxed{f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

b. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \sin(x) + x \times \cos(x)$ donc $\boxed{f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)}$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{3 \times 2x \times (-\sin(x^2))}{(\cos(x^2)+2)^4}$ soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x\sin(x^2)}{(\cos(x^2)+2)^4}}$.

d. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x+1) - (x-1)\,\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1) - (x-1)(\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x[x(\mathrm{e}^x+1) - (x-1)\,\mathrm{e}^x]}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x[x\,\mathrm{e}^x + x - x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x]}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x+\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}$.

3. a. $z_3 = 1+\mathrm{i}+(-2+3\,\mathrm{i})$ donc $\boxed{z_3 = -1+4\,\mathrm{i}}$.

b. $z_4 = (1+\mathrm{i})(-2+3\,\mathrm{i}) = -2+3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} - 3$ donc $\boxed{z_4 = -5+\mathrm{i}}$

c. $z_5 = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}$ donc $\boxed{z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}}$.

d. $z_6 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{-2+3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(-2-3\,\mathrm{i})}{(-2)^2+3^2} = \dfrac{-2-3\,\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}+3}{13}$ donc $\boxed{z_6 = \dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}\,\mathrm{i}}$.

e. $z_7 = \overline{1+\mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_7 = 1-\mathrm{i}}$.

f. $z_8 = \overline{(1+\mathrm{i}) - (-2+3\,\mathrm{i})} = \overline{3-2\,\mathrm{i}}$ donc $\boxed{z_8 = 3+2\,\mathrm{i}}$.

g. $z_9 = \dfrac{1}{\overline{-2+3\,\mathrm{i}}} = \dfrac{1}{-2-3\,\mathrm{i}} = \dfrac{-2+3\,\mathrm{i}}{(-2)^2+(-3)^2}$ donc $\boxed{z_9 = -\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}\,\mathrm{i}}$.

h. $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{-2+3\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\overline{-2+3\,\mathrm{i}}}{\overline{1+\mathrm{i}}} = \dfrac{-2-3\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(-2-3\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{-2-2\,\mathrm{i}-3\,\mathrm{i}+3}{2}$

donc $\boxed{z_{10} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\,\mathrm{i}}$.

4. $\boxed{A-2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$, $\boxed{AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Exercice 2. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z^2 + \overline{z}(z+2)$.

1. On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}\,b$.
   Montrer que $\mathrm{Re}(Z) = 2a^2 + 2a$ et $\mathrm{Im}(Z) = 2ab - 2b$.
2. **a.** Montrer que si z est imaginaire pur alors Z est imaginaire pur.
   b. La réciproque est-elle vraie ?
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.
4. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) = -1$?
5. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) < 0$?

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned} Z &= (a+\mathrm{i}\,b)^2 + (a-\mathrm{i}\,b)(a+\mathrm{i}\,b+2) = a^2 + 2\,\mathrm{i}\,ab - b^2 + a^2 + \mathrm{i}\,ab + 2a - \mathrm{i}\,ba + b^2 - 2\,\mathrm{i}\,b \\ &= 2a^2 + 2a + \mathrm{i}\,(2ab - 2b) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Re}(Z) = 2a^2 + 2a \text{ et } \mathrm{Im}(Z) = 2ab - 2b}$.

2. a. Si $z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ alors $a = 0$ donc $\mathrm{Re}(Z) = 2 \times 0^2 + 2 \times 0 = 0$ et donc $\boxed{Z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}}$.

b. La réciproque est fausse. En effet, si $z=-1$ alors $a=-1$ donc $\mathrm{Re}(Z)=2(-1)^2+2(-1)=0$ et ainsi $\boxed{Z \text{ est imaginaire pur mais } z \text{ ne l'est pas}}$.

3. On a
$$Z\in\mathbb{R}\iff \mathrm{Im}(Z)=0\iff 2b(a-1)=0\iff b=0 \text{ ou } a=1$$
donc $\boxed{\text{l'ensemble des } z \text{ tels que } Z \text{ est réel est } \mathbb{R}\cup\{1+\mathrm{i}\,b \mid b\in\mathbb{R}\}}$.

4. On a
$$\mathrm{Re}(Z)=-1\iff 2a^2+2a=-1\iff 2a^2+2a+1=0.$$
Or, le discriminant du trinôme $2X^2+2X+1$ est $\Delta=2^2-4\times2\times1=-4<0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle. Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de complexe } z \text{ tel que } \mathrm{Re}(Z)=-1}$.

5. Pour $z=-\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$ donc $\mathrm{Re}(Z)=2(-\frac{1}{2})^2+2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0$. Ainsi, on conclut qu'$\boxed{\text{il existe un complexe } z \text{ tel que } \mathrm{Re}(Z)<0}$.

Exercice 3. On considère le nombre complexe $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que $j^2=\overline{j}$.
2. Montrer que $j\in\mathbb{U}$.
3. Écrire j sous forme exponentielle.
4. Calculer sous forme algébrique j^3 puis j^{2024}.

Solution.

1. On a $j^2=\left(-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}-2\times\dfrac{1}{2}\times\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{j^2=\overline{j}}$.

2. $|j|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$ donc $\boxed{j\in\mathbb{U}}$.

3. $j=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{j=\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{2\pi}{3}}}$.

4. Dès lors, $j^3=\left(\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\mathrm{e}^{\text{ß}\frac{2\pi\times3}{3}}=\mathrm{e}^{\text{ß}2\pi}$ donc $\boxed{j^3=1}$.

5. En remarquant que $2024=3\times674+2$, on en déduit que
$$j^{2024}=j^{3\times674+2}=(j^3)^{674}\times j^2=1^{674}\times\overline{j}$$
donc $\boxed{j^{2024}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 2^+ et 2^-. Donner une interprétation graphique de ces limites.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Calculer, pour réel $x\neq2$, $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.

Solution.

1. Étude au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x} = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{2}{x} = 1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

On déduit de ces deux limites que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

Étude au voisinage de 2.

$\lim\limits_{x\to 2} x-1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$. De plus, si $x > 2$ alors $x-2 > 0$ et si $x < 2$ alors $x-2 < 0$.

Par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty}$.

Ainsi, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{1\times(x-2)-(x-1)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}$$

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}}$.

Ainsi, pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

3. On aboutit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Exercice 5. Dans cet exercice, on admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) + x - 1$.

a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \ln(x) + 2$.

b. Étudier, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$ en fonction de x et en déduire les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

c. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

d. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$. Dresser le tableau de variation complet de g.

e. Calculer $g(1)$ puis déterminer, pour tout réel $x > 0$, le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)\ln(x)$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

c. Déterminer les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Solution.

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = +\infty}$.

   b. Pour tout réel $x > 0$,
$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 1$$
   i.e. $\boxed{g'(x) = \ln(x) + 2}$.

   c. Ainsi, pour tout $x > 0$,
$$g'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) + 2 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -2 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-2}$$
   donc $\boxed{g'(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in [\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[\text{ et } g'(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;\mathrm{e}^{-2}]}$.

   On en déduit que $\boxed{g \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;\mathrm{e}^{-2}] \text{ et croissante sur } [\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[}$.

   d. On déduit des questions précédentes le tableau de variation suivant.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
Variation de g	‖ -1	↘	$-\mathrm{e}^{-2} - 1$	↗	$+\infty$

   e. On a $g(1) = 1\ln(1) + 1 - 1 = 0$. D'après le tableau g est négative sur $]0\,;\mathrm{e}^{-2}]$. De plus, sur $[\mathrm{e}^{-2}\,;+\infty[$ g est croissante et s'annule en 1 donc g change de signe en 1 et en 1 seulement.

   On conclut donc que $\boxed{g(x) \leqslant 0 \text{ si } x \in]0\,;1] \text{ et } g(x) \geqslant 0 \text{ si } x \in [1\,;+\infty[}$.

2. **a.** $\lim\limits_{x\to0} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   b. Pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + (x-1) \times \frac{1}{x} = \ln(x) + \frac{x-1}{x} = \frac{x\ln(x) + x - 1}{x}$$
   donc, on a bien, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x}}$.

   c. Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ donc $f'(x) \leq 0$ si $x \in]0\,;1]$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \in [1\,;+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0\,;1] \text{ et est croissante sur } [1\,;+\infty[}$.

Exercice 6. Dans toute la suite, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. **a.** Exprimer $A^2 - 3A$ en fonction de I_3.

   b. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.

2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$\begin{cases} r_{n+1} = 3r_n + s_n \\ s_{n+1} = -2r_n \end{cases}.$$
   En utilisant la question **1.a**, démontrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = r_nA + s_nI_3$.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = BC_n$.
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B^n C_0$. (On pourra utiliser sans démonstration ce résultat dans la suite.)

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b. Calculer PDP^{-1}.

5. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$.

6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

7. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n en fonction de n, A et I_3 puis une expression explicite de A^n en fonction de n seulement.

8. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et montrer qu'il existe deux réels c_n et d_n, que l'on explicitera en fonction de n, tels que $(A^n)^{-1} = c_nA + d_nI_3$.

Solution.

1. **a.** On trouve $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{A^2 - 3A = -2I_3}$.
   b. Ainsi, $A(A-3I_3) = -2I_3$ donc $A \times \left[-\frac{1}{2}(A-3I_3)\right] = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A-3I_3)$ soit encore $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3}$.

2. Consdisérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition, P_n : « $A^n = r_nA + s_nI_3$ ».
Initialisation. Étant donné que $A^0 = I_3$ et que $r_0A + s_0I_3 = 0A + 1I_3 = I_3$, la proposition P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors,
$$A^{n+1} = A^n \times A = (r_nA + s_nI_3) \times A = r_nA^2 + s_nA.$$
Or, d'après la question **1.a**, $A^2 - 3A = -2I_3$ donc $A^2 = 3A - 2I_3$ et ainsi
$$A^{n+1} = r_n(3A - 2I_3) + s_nA = (3r_n + s_n)A - 2r_nI_3 = r_{n+1}A + s_{n+1}I_3$$
donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = r_nA + s_nI_3}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r_n + s_n \\ -2r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = BC_n$$
en posant $\boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. **a.** Le déterminant de P est $\det(P) = 1 \times (-1) - (-2) \times 1 = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$.
   b. Les calculs donnent $\boxed{PDP^{-1} = B}$.

5. **a.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « $B^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation. Comme $B^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, la proposition Q_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question **4.b**,

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \times B = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ B^n = PD^nP^{-1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} B^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -2 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 2^n & -1 + 2^n \\ 2 - 2^n \times 2 & 2 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$,

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = C_n = B^nC_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 \\ 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ r_n = 2^n - 1 \text{ et } s_n = 2 - 2^n}$.

7. Il s'ensuit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}$ i.e.

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -(2^n - 1) & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2(2^n - 1) + (2 - 2^n) & -(2^n - 1) \\ -(2^n - 1) & -(2^n - 1) & 2(2^n - 1) + (2 - 2^n) \end{pmatrix}$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}}$.