Devoir surveillé n°5

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer, en détaillant, la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

a. $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2,\ a = -\infty$ **b.** $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln(x),\ a = 0^+$

c. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ a = +\infty$ **d.** $f(x) = x\mathrm{e}^x - x,\ a = +\infty$

2. Dans chaque cas, on admet que f est dérivable sur I. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On simplifiera au maximum les résultats lorsque cela est possible.

a. $f : x \longmapsto x^3 - \sqrt{x},\ I =]0\,;+\infty[$ **b.** $f : x \longmapsto x\sin(x),\ I = \mathbb{R}$

c. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(\cos(x^2)+2)^3},\ I = \mathbb{R}$ **d.** $f : x \longmapsto \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1},\ I = \mathbb{R}$

3. On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + 3\,\mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres suivants en détaillant les calculs nécessaires.

a) $z_3 = z_1 + z_2$ **b)** $z_4 = z_1 z_2$ **c)** $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$ **d)** $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

e) $z_7 = \overline{z_1}$ **f)** $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$ **g)** $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$ **h)** $z_{10} = \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$

4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A - 2B$, AB, BA et B^2.

Exercice 2. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z^2 + \overline{z}(z+2)$.

1. On suppose que la forme algébrique de z est $z = a + \mathrm{i}\,b$.
Montrer que $\mathrm{Re}(Z) = 2a^2 + 2a$ et $\mathrm{Im}(Z) = 2ab - 2b$.

2. **a.** Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si z est imaginaire pur alors Z est imaginaire pur.

b. La réciproque est-elle vraie ?

3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que Z est réel.

4. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) = -1$?

5. Existe-t-il un complexe z tel que $\mathrm{Re}(Z) < 0$?

Exercice 3. On considère le nombre complexe $j = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que $j^2 = \overline{j}$.

2. Montrer que $j \in \mathbb{U}$.

3. Écrire j sous forme exponentielle.

4. Calculer sous forme algébrique j^3 puis j^{2024}.

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 2^+ et 2^-. Donner une interprétation graphique de ces limites.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Calculer, pour réel $x \neq 2$, $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 5. Dans cet exercice, on admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) + x - 1$.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \ln(x) + 2$.
   - **b.** Étudier, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$ en fonction de x et en déduire les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.
   - **c.** Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   - **d.** On admet que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$. Dresser le tableau de variation complet de g.
   - **e.** Calculer $g(1)$ puis déterminer, pour tout réel $x > 0$, le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)\ln(x)$.
   - **a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   - **b.** Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   - **c.** Déterminer les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 6. Dans toute la suite, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. **a.** Exprimer $A^2 - 3A$ en fonction de I_3.
   - **b.** En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3.
2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$\begin{cases} r_{n+1} = 3r_n + s_n \\ s_{n+1} = -2r_n \end{cases}.$$
   En utilisant la question **1.a**, démontrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = r_nA + s_nI_3$.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice B telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = BC_n$.
   On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = B^nC_0$. (On pourra utiliser sans démonstration ce résultat dans la suite.)
4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   - **b.** Calculer PDP^{-1}.
5. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.
   - **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$.
6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.
7. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n en fonction de n, A et I_3 puis une expression explicite de A^n en fonction de n seulement.