Devoir surveillé n°4

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \qquad B = \frac{3^3 \times 5^2}{15 \times 9} \qquad C = \sum_{k=3}^{7} 2^k \qquad D = \sum_{k=1}^{100} (6k+1)$$

2. Donner les valeurs des nombres suivants.

$$E = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) \qquad G = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad H = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier au maximum les écritures des nombres suivants

$$I = \binom{20}{2} \qquad J = \binom{3}{7} \qquad K = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \qquad K = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.$$

4. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$A(x) = 2x(6-3x) \qquad B(x) = (3x+1)^2 \qquad C(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \qquad D(x) = (x+1)^5$$

5. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 1 + 6x + 9x^2 \qquad B(x) = e^x - e^{3x} \qquad C(x) = x^2 e^x - x e^{2x} \qquad D(x) = e^{4x} - 16.$$

6. Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases}$.

Solution.

1. $A = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30}$ soit $\boxed{A = \frac{19}{30}}$.

$B = \frac{3^3 \times 5^2}{3 \times 5 \times 3^2} = \frac{3^3 \times 5^2}{3^3 \times 5} = \frac{5^2}{5}$ soit $\boxed{B = 5}$.

$C = \sum_{k=0}^{7} 2^k - \sum_{k=0}^{2} 2^k = \frac{1-2^8}{1-2} - \frac{1-2^3}{1-2} = \frac{1-256}{-1} - \frac{1-8}{-1} = 255 - 7$ soit $\boxed{C = 248}$.

Par linéarité, $D = 6\sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 1 = 6 \times \frac{100 \times 101}{2} + 100 = 3 \times 100 \times 101 + 100$ soit $\boxed{D = 30400}$.

2. $E = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{E = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$F = \sin\left(\frac{8\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ soit $\boxed{F = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

$G = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{G = -\sqrt{3}}$.

Par les formules de duplication, $H = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit $\boxed{H = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

3. $I = \dfrac{20 \times 19}{2} = 10 \times 19$ donc $\boxed{I = 190}$.

$\boxed{J = 0}$ car $7 > 3$.

$K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k}$ donc, par la formule du binôme de Newton, $K = (3+1)^n$ soit $\boxed{K = 4^n}$.

$K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} = (1+1)^n - 1$ donc $\boxed{K = 2^n - 1}$.

4. $A(x) = 12x - 6x^2$ soit $\boxed{A(x) = -6x^2 + 12x}$.

$B = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2$ soit $\boxed{B(x) = 9x^2 + 6x + 1}$.

$C(x) = (x^2 + 2x + x + 2)(x+3) = (x^2 + 3x + 2)(x+3) = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6$ soit $\boxed{C(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$.

En utilisant la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal,

$$(x+1)^5 = x^5 + 5 \times x^4 \times 1 + 10 \times x^3 \times 1^2 + 15 \times x^2 \times 1^3 + 5 \times x \times 1^4 + 1^5$$

soit $\boxed{(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}$.

5. $A(x) = 1^2 + 2 \times 1 \times 3x + (3x)^2$ donc $\boxed{A(x) = (1+3x)^2}$.

$B(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+2x} = \mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{2x}) = \mathrm{e}^x(1^2 - (\mathrm{e}^x)^2)$ donc $\boxed{B(x) = \mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^x)}$.

$C(x) = x \times x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{x+x}$ donc $\boxed{C(x) = x\mathrm{e}^x(x - \mathrm{e}^x)}$.

$D(x) = (\mathrm{e}^{2x})^2 - 4^2$ donc $\boxed{D(x) = (\mathrm{e}^{2x} - 4)(\mathrm{e}^{2x} + 4)}$.

6. On échelonne le système par la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ 3x + 2y + z = 2 & L_2 \\ 2x + y - z = -3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ -y - 2z = -4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -y - 3z = -7 & L_3 \leftarrow L3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 2 & L_1 \\ -y - 2z = -4 & L_2 \\ -z = -3 & L_3 \leftarrow L3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 3 = 2 & L_1 \\ -y - 6 = -4 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2 + 3 = 2 & L_1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 & L_1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (S) \text{ est } \{(1, -2, 3)\}}$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2. Calculer u_1 et u_2. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

- **a.** Justifier que le nombre t_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **b.** Démontrer que (t_n) est une suite géométrique.
- **c.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction n.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».
Initialisation. Comme $u_0 = 0 \geqslant 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n \geqslant 0$ donc $2u_n + 3 \geqslant 0$ et $u_n + 4 > 0$ donc, par quotient, $\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \geqslant 0$ i.e.$u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

2. $u_1 = \dfrac{2 \times u_0 + 3}{u_0 + 4} = \dfrac{2 \times 0 + 3}{0 + 4}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{3}{4}}$.

$u_2 = \dfrac{2 \times u_1 + 3}{u_1 + 4} = \dfrac{2 \times \frac{3}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \dfrac{\frac{18}{4}}{\frac{19}{4}} = \dfrac{18}{4} \times \dfrac{4}{19}$ i.e. $\boxed{u_2 = \dfrac{18}{19}}$.

3. **a.** On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $u_n + 3 \neq 0$ et ainsi on en déduit que $\boxed{t_n \text{ est défini pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{3u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{\frac{2u_n+3-(u_n+4)}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3+3(u_n+4)}{u_n+4}} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{5u_n + 15} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} = \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ &= \frac{1}{5} t_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{(t_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \dfrac{1}{5}}$.

c. Comme $t_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ i.e.

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ t_n = -\dfrac{1}{3 \times 5^n}}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ donc $t_n(u_n+3) = u_n - 1$ donc $t_n u_n + 3t_n = u_n - 1$ donc $t_n u_n - u_n = -3t_n - 1$ donc $u_n(t_n - 1) = -3t_n - 1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n \geqslant 1$, $3 \times 5^n \geqslant 3$ donc, par décroissance de la fonction inverser sur $\mathbb{R}_+^*$, $t_n \leqslant \dfrac{1}{3}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \neq 1$ donc $u_n = \dfrac{-3t_n - 1}{t_n - 1} = \dfrac{3t_n + 1}{1 - t_n}$. Ainsi, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3 \times \left(-\frac{1}{3 \times 5^n}\right) + 1}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}} = \frac{-\dfrac{1}{5^n} + 1}{1 + \dfrac{1}{3 \times 5^n}} \times \frac{3 \times 5^n}{3 \times 5^n} = \frac{-3 + 3 \times 5^n}{3 \times 5^n + 1}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3(5^n-1)}{3\times 5^n+1}}$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $f(\ln(2))$.

3. On considère la fonction homographique $h : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

b. Écrire h sous forme réduite.

c. Déterminer les variations de h sur son ensemble de définition.

4. a. En utilisant la question **3.**, montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.

5. En utilisant les variations de h, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\mathrm{e}^x+1 > 0$. En particulier, $\mathrm{e}^x+1 \neq 0$ donc $\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ existe pour tout réel x. Cependant, $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} > 0$ i.e., comme $\mathrm{e}^x+1 > 0$, si et seulement si $\mathrm{e}^x - 1 > 0$. Or,

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$.

2. $f(\ln(2)) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\ln(2)}-1}{\mathrm{e}^{\ln(2)}+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2-1}{2+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ soit $\boxed{f(\ln(2)) = -\ln(3)}$.

3. a. $f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$ i.e. $x \neq -1$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\}}$.

b. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$h(x) = \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-2}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1}$$

donc la forme réduite de h est : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ h(x) = 1 + \dfrac{-2}{x-(-1)}}$.

c. Comme $\beta = -2 < 0$, la fonction <u>h est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$</u>.

4. a. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\mathrm{e}^x \neq -1$ et ainsi $h(\mathrm{e}^x) = 1 + \dfrac{-2}{\mathrm{e}^x+1}$ c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}}$.

b. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x+1 > 0$ donc $\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} > 0$ et ainsi $1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1} < 1$. Or, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln\left(1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}\right) < \ln(1)$ i.e. $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right) < 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) < 0}$.

5. Il résulte de la question précédente que, pour tout réel x, $f(x) = \ln(h(\mathrm{e}^x))$. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Alors, comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^0 < \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ i.e. $1 < \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$. Ensuite, comme h est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$, $h(1) < h(\mathrm{e}^a) < h(\mathrm{e}^b)$ i.e. $0 < h(\mathrm{e}^a) < h(\mathrm{e}^b)$. Enfin, comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut que $\ln(h(\mathrm{e}^a)) < \ln(h(\mathrm{e}^b))$ i.e. $f(a) < f(b)$. On a donc démontré que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_-^*$. Alors,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \iff e^y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ &\iff e^y(e^x + 1) = e^x - 1 \iff e^y e^x + e^y = e^x - 1 \\ &\iff e^y e^x - e^x = -e^y - 1 \iff e^x(e^y - 1) = -e^y - 1 \\ &\underset{y \neq 0}{\iff} e^x = \frac{-e^y - 1}{e^y - 1} \iff e^x = \frac{e^y + 1}{1 - e^y} \end{aligned}$$

Or, comme $y < 0$, $e^y < 1$ donc $1 - e^y > 0$. De plus, $e^y + 1 > 0$ donc $\dfrac{e^y + 1}{1 - e^y} > 0$. Ainsi,

$$y = f(x) \iff x = \ln\left(\frac{e^y + 1}{1 - e^y}\right).$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } \mathbb{R}_-^*}$ et que

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_-^* \\ & x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{1 - e^x}\right) \end{array}}$$

Exercice 4. On considère un jeu de 10 cartes numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 3 cartes dans ce jeu.

1. **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages contiennent au moins 1 nombre pair ?

c. Combien de tirages contiennent 2 nombres pairs et 1 nombre impair dans cet ordre ?

d. Combien de tirages contiennent 2 nombres pairs et 1 nombre impair dans un ordre quelconque ?

e. Combien de tirages contiennent au plus 1 nombre impair ?

2. Reprendre les questions précédentes en supposant les tirages successifs et sans remise.

3. Reprendre les questions **1.a.**, **1.b.**, **1.d.** et **1.e.** en supposant qu'on tire simultanément 3 cartes dans le jeu.

Solution.

1. **a.** Un tirage avec remise est une 3-liste avec répétition : il y a donc $10^3 = 1000$ tirages possibles.

b. Il y a $5^3 = 125$ tirages qui ne contiennent que des nombres impairs donc il y a $1000 - 125 = 875$ tirages contenant au moins 1 nombre pair.

c. Il y a $5^2 \times 5 = 125$ tirages contenant 2 nombres pairs puis 1 nombre impair dans cet ordre.

d. De la même façon, il y a $5 \times 5 \times 5 = 125$ tirages contenant 1 nombre pair puis 1 nombre impair puis 1 nombre pair et $5 \times 5^2 = 125$ tirages contenant 1 nombre impair puis 2 nombres pairs. Ainsi, par le principe additif, il y a $3 \times 125 = 375$ tirages contenant 2 nombres pairs et 1 nombre impair.

e. Il y a $5^3 = 125$ tirages ne contenant aucun nombre impair et 375 tirages contenant exactement 1 nombre impair (d'après la question précédente). Par le principe additif, il y a donc $375 + 125 = 500$ tirages contenant au plus 1 nombre impair.

2. **a.** S'il n'y a pas remise, il s'agit de 3-arrangements. Il y a donc $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.

b. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages qui ne contiennent pas de nombre pair donc il y a $720 - 60 = 660$ tirages contenant au moins 1 nombre pair.

c. Il y a $5 \times 4 \times 5 = 100$ tirages contenant 2 nombres pairs puis 1 nombre impair dans cet ordre.

d. De même, il y a $5 \times 5 \times 4 = 100$ tirages constitués d'un nombre pair puis un nombre impair puis un nombre pair et $5 \times 5 \times 4 = 100$ tirages constitués d'un nombre impair suivi de 2 nombre pairs. Ainsi, il y a au total $3 \times 100 = 300$ tirages contenant 2 nombres pairs et 1 nombre impair.

e. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages qui ne contiennent pas de nombre impairs et, d'après la question précédente, 300 tirages qui contiennent exactement 1 nombre impair. Ainsi, par le principe additif, il y a $300 + 60 = 360$ tirages qui contiennent au plus 1 nombre impaire.

3. a. Si les tirages sont simultanés, il s'agit de combinaisons. Il y a donc $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$ tirages possibles.

b. Il y a $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ tirages qui ne contiennent pas de nombres pairs donc il y a $120 - 10 = 110$ tirages contenant au moins un nombre pair.

d. Par le principe multiplicatif, il y a $\binom{5}{1} \times \binom{5}{2} = 5 \times \dfrac{5 \times 4}{2} = 50$ tirages contenant 2 nombres pairs et un nombre impair.

e. Il y a 10 tirages ne contenant que des nombres pairs et 50 tirages contenant exactement 1 nombre impair donc, par le principe additif, il y a $50 + 10 = 60$ tirages contenant au plus un nombre impair.