Devoir surveillé n°4

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \qquad B = \frac{3^3 \times 5^2}{15 \times 9} \qquad C = \sum_{k=3}^{7} 2^k \qquad D = \sum_{k=1}^{100} (6k+1)$$

2. Donner les valeurs des nombres suivants.

$$E = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) \qquad G = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad H = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier au maximum les écritures des nombres suivants

$$I = \binom{20}{2} \qquad J = \binom{3}{7} \qquad K = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \qquad K = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.$$

4. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$A(x) = 2x(6-3x) \qquad B(x) = (3x+1)^2 \qquad C(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \qquad D(x) = (x+1)^5$$

5. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 1 + 6x + 9x^2 \qquad B(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x} \qquad C(x) = x^2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{2x} \qquad D(x) = \mathrm{e}^{4x} - 16.$$

6. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases}$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2. Calculer u_1 et u_2. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

a. Justifier que le nombre t_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction n.

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $f(\ln(2))$.

3. On considère la fonction homographique $h : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

b. Écrire h sous forme réduite.

c. Déterminer les variations de h sur son ensemble de définition.

4. **a.** En utilisant la question **3.**, montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$.

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.

5. En utilisant les variations de h, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 4. On considère un jeu de 10 cartes numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 3 cartes dans ce jeu.

1. **a.** Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages contiennent au moins 1 nombre pair ?

c. Combien de tirages contiennent 2 nombres pairs et 1 nombre impair dans cet ordre ?

d. Combien de tirages contiennent 2 nombres pairs et 1 nombre impair dans un ordre quelconque ?

e. Combien de tirages contiennent au plus 1 nombre impair ?

2. Reprendre les questions précédentes en supposant les tirages successifs et sans remise.

3. Reprendre les questions **1.a.**, **1.b.**, **1.d.** et **1.e.** en supposant qu'on tire simultanément 3 cartes dans le jeu.