Devoir surveillé n°4

Durée : 2h15

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \qquad B = \frac{12^5}{2^8 \times 3^6} \qquad C = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}.$$

2. Déterminer les valeurs des nombres suivants.

$$D = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad E = \sin(2025\pi) \qquad F = \tan\left(\frac{7\pi}{3}\right).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$G(x) = (x-1)(x^2+x+1) \qquad H(x) = (x-2)(x+1)(2x-5) \qquad I(x) = (x+1)^5.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

$$J(x) = x(x+3) - x - 3 \qquad K(x) = (x+1)^2 - 9 \qquad L(x) = 16x^2 + 8x + 1.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (k + k^2) \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} 2^k \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+2u_n}.$$

On admet que cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2(1+2u_n)}$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{2}$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{2 - u_n}.$$

a. Justifier que le nombre v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \end{array}$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Démontrer que f est impaire.

3. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

4. **a.** Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ par -1 et 1.

b. Le nombre -1 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$?

c. Le nombre 1 est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

5. On considère la fonction homographique $h : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

a. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

b. Déterminer la forme réduite de h et en déduire les variations de h sur $\mathcal{D}_h$.

c. Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Justifier que $0 < \mathrm{e}^{2a} < \mathrm{e}^{2b}$ puis que $h(\mathrm{e}^{2a}) < h(\mathrm{e}^{2b})$.

d. Déduire de la question précédente les variations de f sur $\mathbb{R}$.

6. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 4. Une urne contient 10 boules réparties de la manière suivante :

- 4 boules vertes numérotées 1, 2, 3 et 4.
- 6 boules rouges numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On tire simultanément 3 boules dans l'urne. Pour chacune des questions suivantes, on donnera le résultat sous forme explicite (c'est-à-dire en calculant et simplifiant dans les calculs les puissances/produit/factorielles/coefficients binomiaux qui pourraient apparaître).

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?

2. Combien y a-t-il de tirages composés d'une boule rouge et de deux boules vertes ?

3. Combien y a-t-il de tirages composés uniquement de boules portant un numéro impair ?

4. Combien y a-t-il de tirages composés de boules portant les numéros 3, 4 et 5 ?

5. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules rouges et exactement une boule portant un numéro impair ?