Devoir surveillé n°4

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \qquad B = \frac{2^2 \times 10^3}{16 \times 5^2} \qquad C = 1 + \frac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{2} \qquad D = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

2. Donner les valeurs des nombres suivants.

$$E = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad G = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad H = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

3. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$A(x) = -x(x-2) \qquad B(x) = (2x-3)^2 \qquad C(x) = (3-x)(7x+2) \qquad D(x) = (x-1)(x+3)(x+1)$$

4. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 4x^2+4x+1 \qquad B(x) = 64-9x^2 \qquad C(x) = x^2-5x \qquad D(x) = (x+1)^2+x^2-1.$$

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2+x-2)$.

Solution.

1. $A = \frac{1}{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}}$ donc $\boxed{A = \frac{6}{5}}$.

$B = \frac{2^2 \times (2\times 5)^3}{2^4 \times 5^2} = \frac{2^2 \times 2^3 \times 5^{3-2}}{2^4} = \frac{2^5 \times 5^1}{2^4} = 2^1 \times 5$ soit $\boxed{B = 10}$.

$C = 1 + \frac{1+\frac{\frac{3}{2}}{2}}{2} = 1 + \frac{1+\frac{3}{4}}{2} = 1 + \frac{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}{2} = 1 + \frac{\frac{7}{4}}{2} = 1 + \frac{7}{8} = \frac{8}{8} + \frac{7}{8}$ donc $\boxed{C = \frac{15}{8}}$.

$D = \frac{5}{7} - \frac{5}{14} - \frac{1}{2} = \frac{10}{14} - \frac{5}{14} - \frac{7}{14} = -\frac{2}{14}$ donc $\boxed{D = -\frac{1}{7}}$.

2. $E = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{E = -\frac{1}{2}}$.

$F = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{F = -\frac{1}{2}}$.

$G = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{G = -1}$.

$H = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{H = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

3. $\boxed{A(x) = -x^2 + 2x}$

$B(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$ donc $\boxed{B(x) = 4x^2 - 12x + 9}$.

$C(x) = 21x + 6 - 7x^2 - 2x$ donc $\boxed{C(x) = -7x^2 + 19x + 6}$

$D(x) = (x-1)(x+1)(x+3) = (x^2-1)(x+3)$ donc $\boxed{D(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3}$.

4. $A(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$ donc $\boxed{A(x) = (2x+1)^2}$.

$B(x) = 8^2 - (3x)^2$ donc $\boxed{B(x) = (8-3x)(8+3x)}$.

$\boxed{C(x) = x(x-5)}$

$D(x) = (x+1)^2 + (x+1)(x-1) = (x+1)[(x+1)+(x-1)]$ donc $\boxed{D(x) = 2x(x+1)}$.

5. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + x - 2 > 0$. Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$$

Comme $a = 1 > 0$, on en déduit que $x^2 + x - 2 > 0$ si et seulement si $x < -2$ ou $x > 1$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[}$.

Exercice 2.

1. Résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -5x + 12y = 8 \end{cases}$ par la méthode de votre choix.

2. Résoudre le système (S_2) : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 6z = -5 \\ -x + 3y - 3z = 5 \end{cases}$ par la méthode du pivot de Gauss.

Solution.

1. (S_1) : $\begin{cases} 3x - 7y = -4 & L_1 \\ -5x + 12y = 8 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8 & L_1 \leftarrow 12L_1 + 7L_2 \\ y = 4 & L_2 \leftarrow 5L_1 + 3L_2 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S_1) \text{ est } (8\,;4)}$.

2. (S_2) : $\begin{cases} x + 2y + 3y = 0 & L_1 \\ 2x - y + 6z = -5 & L_2 \\ -x + 3y - 3z = 5 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3y = 0 & L_1 \\ \quad -5y \quad = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad 5y \quad = 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$

$(S_2) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2 \times 1 + 3z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3z - 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } (S_2) \text{ est } \{(-3z-1\,;1\,;z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Démontrer que f est impaire.

3. a. Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, $\mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$.

b. En revenant à la définition, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x est équivalente à $\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

b. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ d'inconnue x en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

c. Conclure que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2}$ donc $\boxed{f(0) = 0}$.

2. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -f(x)$$

donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3. a. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors, comme $-1 < 0$, $-a > -b$ et donc, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$. Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } a < b,\ \mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}}$.

b. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. D'après la question précédente, $\mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$ donc, en multipliant par $-1 < 0$, $-\mathrm{e}^{-a} < -\mathrm{e}^{-b}$. De plus, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{a} < \mathrm{e}^{b}$ donc, en ajoutant membre à membre les inégalités, $\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a} < \mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b}$. Enfin, en divisant par $2 > 0$, il vient $\dfrac{\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{-a}}{2} < \dfrac{\mathrm{e}^{b} - \mathrm{e}^{-b}}{2}$ i.e. $f(a) < f(b)$.

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

4. a. Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = y \iff \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \iff \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 2y \iff \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{x}} = 2y \iff \mathrm{e}^{2x} - 1 = 2y\,\mathrm{e}^{x}$$

et donc, finalement, $\boxed{f(x) = y \text{ équivaut à } \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0}$.

b. En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, l'équation précédente se réécrit $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $(-2y)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-(-2y) - \sqrt{4(y^2+1)}}{2 \times 1} = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$$

et

$$X_2 = \frac{-(-2y) + \sqrt{4(y^2+1)}}{2 \times 1} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

On en déduit que

$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = y - \sqrt{y^2+1} \text{ ou } \mathrm{e}^{x} = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Or, $y^2 + 1 > y^2 \geqslant 0$ donc, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geqslant y$ donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$. De plus, $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geqslant -y$ donc $y + \sqrt{y^2+1} > 0$. On en déduit donc que

$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Ainsi, l'unique solution de $\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ est $\ln(y + \sqrt{y^2+1})$

c. Ainsi, pour tout réel y, $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, de plus, sa bijection réciproque est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \end{array}$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. Calculer u_1 et u_2. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

2. On considère la fonction homographique $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Écrire f sous forme réduite.

c. En déduire les variations de f.

3. En utilisant les variations de f, démontrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.$$

4. a. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(3+u_n)}{u_n+4}.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n+3}{u_n-1}$.

a. Justifier que le nombre t_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction n.

Solution.

1. $u_1 = \dfrac{2\times 2+3}{2+4}$ donc $\boxed{u_1 = \dfrac{7}{6}}$ et $u_2 = \dfrac{2\times\frac{7}{6}+3}{\frac{7}{6}+4} = \dfrac{\frac{7}{3}+3}{\frac{7}{6}+\frac{24}{6}} = \dfrac{\frac{7}{3}+\frac{9}{3}}{\frac{31}{6}} = \dfrac{16}{3}\times\dfrac{6}{31}$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{32}{31}}$.

2. a. $f(x)$ existe si et seulement si $x+4 \neq 0$ i.e. $x \neq -4$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-4\}}$.

b. Pour tout réel $x \neq -4$,

$$f(x) = 2\times\frac{x+\frac{3}{2}}{x+4} = 2\times\frac{x+4-4+\frac{3}{2}}{x+4} = 2\left(1+\frac{-\frac{5}{2}}{x+4}\right) = 2+\frac{-5}{x-(-4)}$$

Ainsi, la forme réduite de f est : pour tout réel x, $\boxed{f(x) = 2+\dfrac{-5}{x-(-4)}}$.

c. Comme $\beta = -5 < 0$, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]\infty\,;-4[\text{ et sur }]-4\,;+\infty[}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n > 1$ ».

• **Initialisation.** Sachant que $u_0 = 2$, P_0 est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie. Alors, $u_n > 1$ donc, comme f est strictement croissante sur $]-4\,;+\infty[$, $f(u_n) > f(1)$. Or, $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $u_{n+1} < 1$ i.e. P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1}.$$

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n = \frac{2u_n+3-u_n(u_n+4)}{u_n+4} \\ &= \frac{2u_n+3-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = \frac{-u_n-2u_n+2}{u_n+4}. \end{aligned}$$

Or, $(1-u_n)(3+u_n) = 3+u_n-3u_n-u_n^2 = -u_n^2-2u_n+3$ donc

$$\boxed{u_{n+1}-u_n = \frac{(1-u_n)(3+u_n)}{u_n+4}}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu dans la question **3.** que $u_n > 1$ donc $1-u_n < 0$, $3+u_n > 0$ et $u_n+4 > 0$. On déduit alors de la question précédente que $u_{n+1}-u_n < 0$ ce qui prouve $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, on a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n}$.

5. **a.** On a vu à la question **3.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $u_n \neq 1$. Ainsi, $\boxed{\text{le nombre } v_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1} = \frac{2u_n+3+3(u_n+4)}{2u_n+3-(u_n+4)} \\ &= \frac{2u_n+3+3u_n+12}{2u_n+3-u_n-4} = \frac{5u_n+15}{u_n-1} = 5 \times \frac{u_n+3}{u_n-1} \end{aligned}$$

i.e. $t_{n+1} = 5t_n$. Ainsi, $\boxed{(t_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 5}$.

c. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times 5^n$. Or, $t_0 = \dfrac{u_0+3}{u_0-1} = 5$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ t_n = 5 \times 5^n = 5^{n+1}}$.

Pour finir, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{u_n+3}{u_n-1}$ donc $t_n(u_n-1) = u_n+3$ donc $t_nu_n - v_n = u_n+3$ donc $t_nu_n - u_n = v_n+3$ donc $u_n(t_n-1) = t_n+3$. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ donc $t_n+3 \neq 0$ et ainsi $t_n-1 \neq 0$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{t_n+3}{t_n-1}$ i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5^{n+1}+3}{5^{n+1}-1}}.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on pourra utiliser les valeurs suivantes.

$\binom{14}{3} = 364$	$\binom{14}{4} = 1001$	$\binom{14}{5} = 2002$
$\binom{15}{3} = 455$	$\binom{15}{4} = 1\,365$	$\binom{15}{5} = 3\,003$
$\binom{16}{3} = 560$	$\binom{16}{4} = 1\,820$	$\binom{16}{5} = 4\,368$
$\binom{32}{3} = 4\,960$	$\binom{32}{4} = 35\,960$	$\binom{32}{5} = 201\,376$

Dans un jeu de 32 cartes, il y a les cartes de couleur rouge (cœur et carreau) et les cartes de couleur noire (trèfle et pique).

On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains peut-on former ?

2. Combien de mains contiennent les 4 as ?

3. Combien de mains contiennent uniquement des cartes de couleur rouge ?

4. Combien de mains contiennent exactement un roi, exactement une dame et exactement un valet ?

5. Combien de mains contiennent le roi de trèfle et au moins trois cartes de couleur noire ?

Solution.

1. On peut former $\boxed{\binom{32}{5} = 201\,376 \text{ mains}}$.

2. Pour former une main avec les 4 as, il suffit de choisir la 5e carte parmi les 28 autres : il y a 28 choix donc il y a $\boxed{28 \text{ mains}}$ qui contiennent les 4 as.

3. Il y a 16 cartes de couleur rouges donc il y a $\boxed{\binom{16}{5} = 4\,368}$ mains qui contiennent uniquement des cartes de couleurs rouges.

4. Il y a $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{20}{2} = 4^3 \times \dfrac{20 \times 19}{2} = 64 \times 10 \times 19 = \boxed{12\,160}$ mains qui contiennent exactement un roi, exactement une dame et exactement un valet.

5. Pour ne pas compter plusieurs fois la même main, il convient de distinguer en fonction du nombre de cartes noires. Sachant que le roi de trèfle est imposé, il reste 4 cartes à choisir.
Si la main contient exactement 3 cartes noires, il faut en choisir 2 autres : il y a $\binom{15}{2} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 105$ possibilités puis choisir 2 cartes rouges : il y a $\binom{16}{2} = \dfrac{16 \times 15}{2} = 120$ possibilités. Ainsi, il y a $105 \times 120 = 12\,600$ mains qui contiennent exactement 3 cartes noires dont le roi de trèfle.
De même, il y a $\binom{15}{3} \times 16 = 455 \times 16 = 7\,280$ mains qui contiennent exactement 4 cartes noires dont le roi de trèfle.
Enfin, il y a $\binom{15}{4} = 1\,365$ mains qui contiennent exactement 5 cartes noires dont le roi de trèfle.
On conclut donc qu'il y a $12\,600 + 7\,280 + 1\,365 = \boxed{21\,245}$ mains qui contiennent le roi de trèfle et au moins trois cartes noires.