Devoir surveillé n°4

Durée : 3h

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1.

1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \qquad B = \frac{2^2 \times 10^3}{16 \times 5^2} \qquad C = 1 + \frac{1 + \frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{2} \qquad D = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

2. Donner les valeurs des nombres suivants.

$$E = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad G = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad H = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

3. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$A(x) = -x(x-2) \qquad B(x) = (2x-3)^2 \qquad C(x) = (3-x)(7x+2) \qquad D(x) = (x-1)(x+3)(x+1)$$

4. Factoriser les expressions suivantes.

$$A(x) = 4x^2+4x+1 \qquad B(x) = 64-9x^2 \qquad C(x) = x^2-5x \qquad D(x) = (x+1)^2+x^2-1.$$

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2+x-2)$.

Exercice 2.

1. Résoudre le système $(S_1) : \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ -5x + 12y = 8 \end{cases}$ par la méthode de votre choix.

2. Résoudre le système $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 6z = -5 \\ -x + 3y - 3z = 5 \end{cases}$ par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Démontrer que f est impaire.

3. **a.** Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, $\mathrm{e}^{-a} > \mathrm{e}^{-b}$.

b. En revenant à la définition, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x est équivalente à $\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

b. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$ d'inconnue x en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

c. Conclure que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Calculer u_1 et u_2. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

2. On considère la fonction homographique $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Écrire f sous forme réduite.

c. En déduire les variations de f.

3. En utilisant les variations de f, démontrer par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.$$

4. a. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 1}$.

a. Justifier que le nombre t_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que (t_n) est une suite géométrique.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de t_n puis celle de u_n en fonction n.

Exercice 5. Dans cet exercice, on pourra utiliser les valeurs suivantes.

$$\binom{14}{3} = 364 \qquad \binom{14}{4} = 1001 \qquad \binom{14}{5} = 2002$$
$$\binom{15}{3} = 455 \qquad \binom{15}{4} = 1\,265 \qquad \binom{15}{5} = 3\,003$$
$$\binom{16}{3} = 560 \qquad \binom{16}{4} = 1\,820 \qquad \binom{16}{5} = 4\,368$$
$$\binom{32}{3} = 4\,960 \qquad \binom{32}{4} = 35\,960 \qquad \binom{32}{5} = 201\,376$$

Dans un jeu de 32 cartes, il y a les cartes de couleur rouge (cœur et carreau) et les cartes de couleur noire (trèfle et pique).

On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains peut-on former ?

2. Combien de mains contiennent les 4 as ?

3. Combien de mains contiennent uniquement des cartes de couleur rouge ?

4. Combien de mains contiennent exactement un roi, exactement une dame et exactement un valet ?

5. Combien de mains contiennent le roi de trèfle et au moins trois cartes de couleur noire ?