Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Calculer les nombres suivants.

$$A = \binom{2025}{1} \qquad B = \binom{10}{7} \qquad C = \binom{9}{8} \qquad D = 5!$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad G = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) \qquad H = \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right).$$

Solution.
Par propriété, $\boxed{A = 2025}$.
Par propriété, $B = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4$ soit $\boxed{B = 120}$.
Par propriété, $C = \binom{9}{9-8} = \binom{9}{1}$ donc $\boxed{C = 9}$.
Par définition, $D = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10 \times 12$ donc $\boxed{D = 120}$.
Par propriété, $\boxed{E = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.
Par propriété, $\boxed{F = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
Par propriété, $G = \cos\left(\frac{18\pi + 2\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{G = -\frac{1}{2}}$.
Par propriété, $H = -\sin\left(\frac{(18-1)\pi}{6}\right) = -\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{H = -\frac{1}{2}}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer sans symbole Σ et en simplifiant au maximum les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 2k) \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k.$$

Solution.
Comme $2 \neq 1$, $S_1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$ soit $\boxed{S_1 = 2^{n+1} - 1}$.
D'après la formule du binôme de Newton, $S_2 = (2+3)^n$ i.e. $\boxed{S_2 = 5^n}$.
Par linéarité,

$$\begin{aligned} S_3 &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\ &= n(n+1)(2n+1+1) = n(n+1)(2n+2) = n(n+1) \times 2(n+1) \end{aligned}$$

donc $\boxed{S_3 = 2n(n+1)^2}$.

Grâce à la formule du binôme de Newton,

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - \binom{n}{n} 2^n = (2+1)^n - 2^n$$

donc $\boxed{S_4 = 3^n - 2^n}$.

Exercice 3. On considère la suite (a_n) définie par : $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$.

1. Calculer a_1 et a_2.

2. La suite (a_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

3. On considère la suite (b_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + 2^n$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 2^{n+1} = 3 \times 2^n$.

b. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times 3^n - 2^n$.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Solution.

1. $a_1 = a_{0+1} = 3a_0 + 2^0 = 3 \times 1 + 1$ donc $\boxed{a_1 = 4}$.
$a_2 = a_{1+1} = 3a_1 + 2^1 = 3 \times 4 + 2$ donc $\boxed{a_2 = 14}$.

2. Comme $a_1 - a_0 = 3$ et $a_2 - a_1 = 10$, $a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1$ donc (a_n) n'est pas arithmétique. De même, $\frac{a_1}{a_0} = 4$ et $\frac{a_2}{a_1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ donc $\frac{a_1}{a_0} \neq \frac{a_2}{a_1}$ et ainsi (a_n) n'est pas géométrique.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \times 2^1 = 2^n(1+2) = 2^n \times 3$ donc $\boxed{2^n + 2^{n+1} = 3 \times 2^n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2^{n+1} = 3a_n + 2^n + 2^{n+1}$$

donc, d'après la question **a.**,

$$b_{n+1} = 3a_n + 3 \times 2^n = 3(a_n + 2^n) = 3b_n$$

donc $\boxed{(b_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 3}$. De plus, sont premier terme est $b_0 = a_0 + 2^0 = 1 + 1$ donc $\boxed{b_0 = 2}$.

c. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = 2 \times 3^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + 2^n$ donc $a_n = b_n - 2^n$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = 2 \times 3^n - 2^n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} (2 \times 3^k - 2^k) = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\
&= 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{-2} - \frac{1-2^{n+1}}{-1} = \frac{1-3^{n+1}}{-1} + 1 - 2^{n+1} = -1 + 3^{n+1} + 1 - 2^{n+1}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = 3^{n+1} - 2^{n+1}}.$$

Exercice 4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-3}{x+1} \end{array}$$

1. Calculer l'image de 4 par f.

2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par f.

3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. L'image de 4 par f est $f(4) = \dfrac{4-3}{4+1}$ soit $\boxed{f(4) = \dfrac{1}{5}}$.

2. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f(x) = 5 \iff \frac{x-3}{x+1} = 5 \underset{x\neq -1}{\iff} x-3 = 5(x+1) \iff x-3 = 5x+5 \iff -8 = 4x \iff -2 = x.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique antécédent de 5 par } f \text{ est } -2}$.

3. Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\begin{aligned} f(x) = y \iff \frac{x-3}{x+1} = y &\underset{x\neq -1}{\iff} x-3 = y(x+1) \iff x-3 = yx+y \\ &\iff x - yx = y+3 \iff x(1-y) = y+3 \\ &\underset{y\neq 1}{\iff} x = \frac{y+3}{1-y} \end{aligned}$$

De plus, si $\dfrac{y+3}{1-y} = -1$ alors $y+3 = -(1-y) = -1+y$ donc $3 = -1$ ce qui est absurde donc $\dfrac{y+3}{1-y} \neq -1$.

Ainsi, tout réel $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ admet un unique antécédent $x = \dfrac{y+3}{1-y}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par f donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et, de plus,

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+3}{1-x} \end{array}}.$$

Exercice 5.

1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\sin(x) > -1$.

4. Résoudre dans $]0\,;\pi]$ l'inéquation $\cos(2x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\sin^2(x) \geqslant \cos(x) + 1$.

Solution.

1. Pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ dans }]-\pi\,;\pi] \text{ est } \left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}}$.

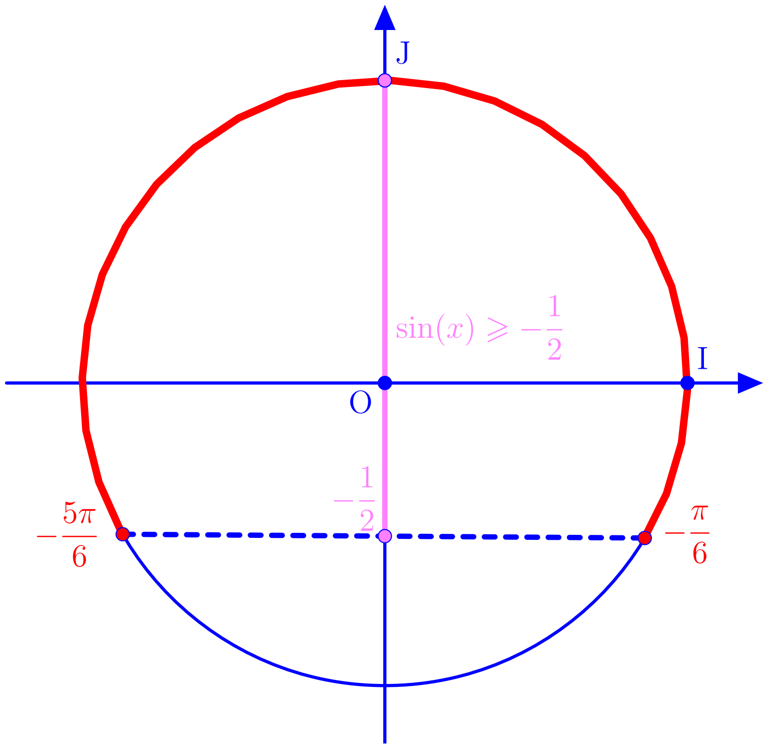
2. Pour tout $x \in [0\,;2\pi[$,

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \iff x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dans } [0\,;2\pi[\text{ est } \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}$.

3. Pour tout $x \in [-\pi\,;\pi[$,

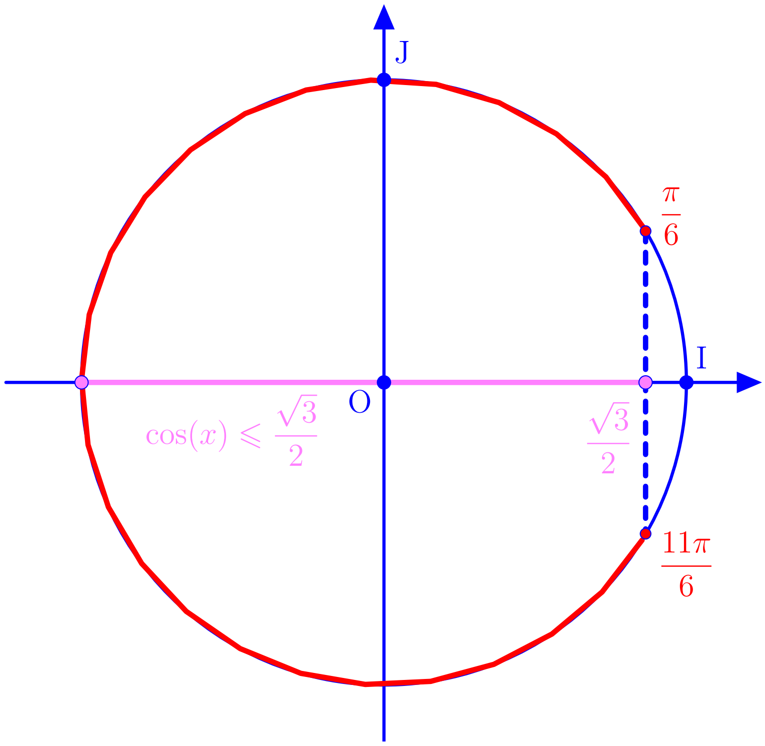
$$2\sin(x) > -1 \iff \sin(x) > -\frac{1}{2}.$$



Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } 2\sin(x) > -1 \text{ dans }]-\pi\,;\pi] \text{ de } \left]-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right]}$.

4. Posons $X = 2x$. Alors, comme $x \in]0\,;\pi]$, $0 < x \leqslant \pi$ donc $0 < 2x \leqslant 2\pi$ i.e. $0 < X \leqslant 2\pi$.

Ainsi, on est ramené à résoudre $\cos(X) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]0\,;2\pi]$.



Pour tout $X \in]0\,;2\pi]$,

$$\cos(X) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\pi}{6} \leqslant X \leqslant \frac{11\pi}{6}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;\pi]$,

$$\cos(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\pi}{6} \leqslant 2x \leqslant \frac{11\pi}{6} \iff \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \cos(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sur }]0\,;\pi] \text{ est } \left[\frac{\pi}{12}\,;\frac{11\pi}{12}\right]}$.

5. Pour tout réel $x \in]-\pi\,;\pi]$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et ainsi

$$\begin{aligned} 2\sin^2(x) \geqslant \cos(x) + 1 &\iff 2(1 - \cos^2(x)) \geqslant \cos(x) + 1 \\ &\iff 2 - 2\cos^2(x) \geqslant \cos(x) + 1 \\ &\iff 0 \geqslant \cos(x) + 1 - 2 + 2\cos^2(x) \\ &\iff 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Posons $X = \cos(x)$. Alors, l'inéquation se réécrit $2X^2 + X - 1 < 0$. Le discriminant du trinôme $2X^2 + X - 1$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

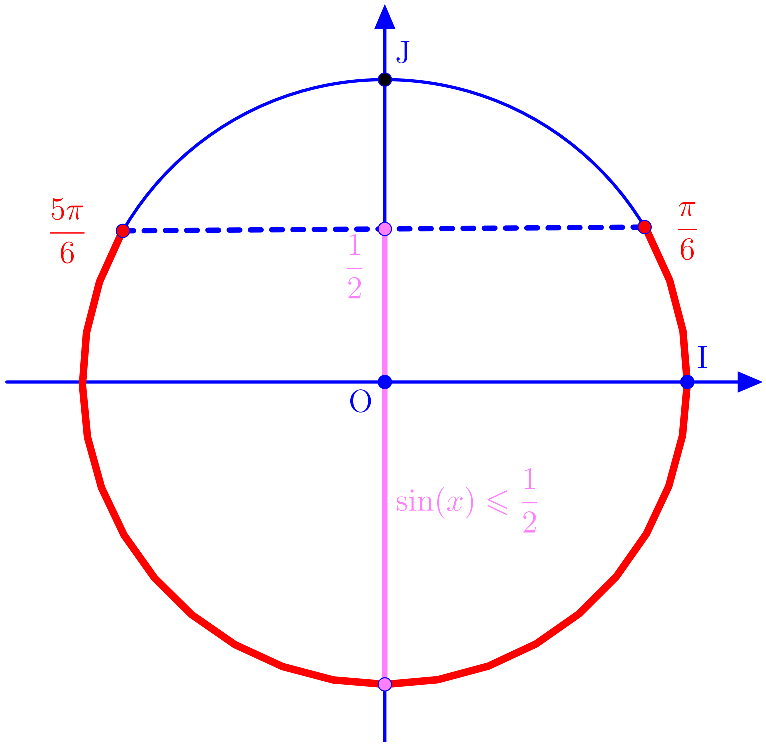
$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, comme $a = 2 > 0$, $2X^2 + X - 1 \leqslant 0$ si et seulement si $X \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$. On en déduit que, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$2\sin^2(x) \geqslant \cos(x) + 1 \iff -1 \leqslant \sin(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Or, pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1$ donc, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$2\sin^2(x) \geqslant \cos(x) + 1 \iff \sin(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$



Dès lors, pour tout $x \in \left]-\pi\,;\pi\right]$,

$$\sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\pi < x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } 2\sin^2(x) \geqslant \cos(x)+1 \text{ sur } \left]-\pi\,;\pi\right] \text{ est } \left]-\pi\,;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]}$.