Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Calculer les nombres suivants.

$$A = \binom{2025}{1} \qquad B = \binom{10}{7} \qquad C = \binom{9}{8} \qquad D = 5!$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad F = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad G = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) \qquad H = \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right).$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer sans symbole Σ et en simplifiant au maximum les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 2k) \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k.$$

Exercice 3. On considère la suite (a_n) définie par : $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$.

1. Calculer a_1 et a_2.

2. La suite (a_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

3. On considère la suite (b_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n + 2^n$.

- **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 2^{n+1} = 3 \times 2^n$.
- **b.** Démontrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- **c.** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 \times 3^n - 2^n$.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice 4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-3}{x+1} \end{array}$$

1. Calculer l'image de 4 par f.

2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par f.

3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.

1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\sin(x) > -1$.

4. Résoudre dans $]0\,;\pi]$ l'inéquation $\cos(2x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\sin^2(x) \geqslant \cos(x) + 1$.