Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\qquad B=\sum_{k=1}^{10}(k+3)\qquad C=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\qquad D=\sum_{k=1}^{10}2k^2.$$

Solution.
$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}$ soit $A=\frac{25}{12}$.

Par linéarité, $B=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}3=\frac{10\times 11}{2}+3\times 10=5\times 11+30$ soit $\boxed{B=85}$.

Par propriété, $C=2^5$ donc $\boxed{C=32}$.

Par linéarité, $D=2\sum_{k=1}^{10}k^2=2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}=10\times 11\times 7$ soit $\boxed{D=770}$.

Exercice 2. Calculer les nombres suivants.

$$A=\binom{2024}{1}\qquad B=\binom{10}{8}\qquad C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\qquad D=\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)\qquad E=\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right).$$

Solution.
Par propriété, $\boxed{A=2024}$.

Par propriété, $B=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}$ soit $\boxed{B=45}$.

Par propriété, $C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{C=-\frac{1}{2}}$.

Par propriété, $D=\cos\left(\frac{(20+1)\pi}{4}\right)=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{D=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Par propriété, $E=-\sin\left(\frac{(18+1)\pi}{6}\right)=-\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{E=\frac{1}{2}}$.

Exercice 3. On considère la suite (a_n) définie par : $a_0=4$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=3a_n-4$.

1. Calculer a_1 et a_2.

2. On considère la suite (b_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=a_n-2$.

a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de b_n en fonction de n et en déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n.

3. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}a_k=3^{n+1}+2n+1$.

Solution.

1. Par définition, $a_1 = a_{0+1} = 3a_0 - 4 = 3 \times 4 - 4$ donc $\boxed{a_1 = 8}$ et $a_2 = a_{1+1} = 3a_1 - 4 = 3 \times 8 - 4$ soit $\boxed{a_2 = 20}$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 3a_n - 4 - 2 = 3a_n - 6 = 3(a_n - 2) = 3b_n$$

donc $\boxed{(b_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 3}$. De plus, son premier terme est $\boxed{b_0 = 4 - 2 = 2}$.

b. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = 2 \times 3^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - 2$ donc $a_n = b_n + 2$ et ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = 2 \times 3^n + 2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (2 \times 3^k + 2) = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k + \sum_{k=0}^{n} 2 = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k + 2 \times (n+1).$$

Or, comme $3 \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 2 \times \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 2(n+1) = 3^{n+1} - 1 + 2n + 2$$

soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 3^{n+1} + 2n + 1}$.

Exercice 4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2 - x}{3 + x} \end{array}$$

1. Calculer l'image de -2 par f.

2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par f.

3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. L'image de -2 par f est $f(-2) = \dfrac{2 - (-2)}{3 + (-2)} = \dfrac{4}{1}$ soit $\boxed{f(-2) = 4}$.

2. Pour tout réel $x \neq -3$,

$$f(x) = 2 \iff \frac{2 - x}{3 + x} = 2 \underset{x \neq -3}{\iff} 2 - x = 2(3 + x) \iff 2 - x = 6 + 2x \iff -4 = 3x \iff -\frac{4}{3} = x.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique antécédent de 2 par } f \text{ est } -\dfrac{4}{3}}$.

3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2 - x}{3 + x} = y \underset{x \neq -3}{\iff} 2 - x = y(3 + x) \iff 2 - x = 3y + xy \\ &\iff 2 - 3y = xy + x \iff 2 - 3y = x(1 + y) \\ &\underset{y \neq -1}{\iff} \frac{2 - 3y}{1 + y} = x \end{aligned}$$

De plus, si $\dfrac{2-3y}{1+y} = -3$ alors $2-3y = -3(1+y) = -3-3y$ donc $2=-3$ ce qui est absurde donc $\dfrac{2-3y}{1+y} \neq -3$.

Ainsi, tout réel $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ admet un unique antécédent $x = \dfrac{2-3y}{1+y}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par f donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et, de plus,

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} \setminus 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-3\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2-3x}{1+x} \end{array}}.$$

Exercice 5. Échelonner puis résoudre le système $(S) \begin{cases} x+2y-z=-6 \\ 3x-y+z=8 \\ 2x+5y+3z=1 \end{cases}$.

Solution.

$$(S) \begin{cases} x+2y-z=-6 & L_1 \\ 3x-y+z=8 & L_2 \\ 2x+5y+3z=1 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-z=-6 & L_1 \\ -7y+4z=26 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ y+5z=13 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-z=-6 & L_1 \\ y+5z=13 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -7y+4z=26 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-z=-6 & L_1 \\ y+5z=13 & L_2 \\ 39z=107 & L_3 \leftarrow L_3+7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y-3=-6 & L_1 \\ y+5\times 3=13 & L_2 \\ z=3 & L_3 \leftarrow L_3+7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2\times(-2)=-3 & L_1 \\ y=-2 & L_2 \\ z=3 & L_3 \leftarrow L_3+7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1 & L_1 \\ y=-2 & L_2 \\ z=3 & L_3 \leftarrow L_3+7L_1 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique solution de } (S) \text{ est } (1,-2,3)}$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

1. Calculer S_2, S_3 et S_4.

2. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats précédents ?

3. Soit un entier $n \geqslant 2$.

a. En utilisant les formules d'addition, montrer que, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right).$$

b. En déduire que $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) S_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{n}\right)$.

c. Conclure.

Solution.

1. $S_2 = \sin\left(\dfrac{2\times 1\pi}{2}\right) = \sin(\pi)$ donc $\boxed{S_2 = 0}$.

$S_3 = \sin\left(\dfrac{2\times 1\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\times 2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{S_3 = 0}$.

$S_4 = \sin\left(\dfrac{2\times 1\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{2\times 2\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{2\times 3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1$ donc $\boxed{S_4 = 0}$.

2. On peut conjecturer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = 0$.

3. a. Grâce au formule d'addition,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&\quad - \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&\quad - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{n}\right)}$.

b. Par linéarité, on en déduit que

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) S_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme téléscopique donc

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) S_n &= \cos\left(\frac{2\times 1\times\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2(n-1+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

soit finalement $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) S_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{n}\right)}$.

c. On en déduit, par propriétés du cosinus, que

$$2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) S_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

De plus, comme $n \geqslant 2$, $0 < \dfrac{\pi}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) > 0$. On conclut donc que $\boxed{S_n = 0}$.