Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \qquad B = \sum_{k=0}^{10} 2 \qquad C = \sum_{k=0}^{5} 2^k \qquad D = \sum_{k=1}^{20} k \qquad E = \sum_{k=1}^{10} k^2.$$

Solution.
$A = \dfrac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{6}{1}$ donc $\boxed{A = 5}$.
$B = 2 \times 11$ donc $\boxed{B = 22}$.
Comme $2 \neq 1$, $C = \dfrac{1-2^6}{1-2} = \dfrac{1-64}{-1} = \dfrac{-63}{-1}$ donc $\boxed{C = 63}$.
$D = \dfrac{20 \times (20+1)}{2} = \dfrac{20 \times 21}{2} = 10 \times 21$ donc $\boxed{D = 210}$.
$E = \dfrac{10(10+1)(2 \times 10+1)}{6} = \dfrac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7$ donc $\boxed{E = 385}$.

Exercice 2. Calculer les nombres suivants.

$$A = \binom{10}{2} \qquad B = \binom{9}{7} \qquad C = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad D = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) \qquad E = \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right).$$

Solution.
$A = \dfrac{10(10-1)}{2} = \dfrac{10 \times 9}{2}$ donc $\boxed{A = 45}$.
$B = \dbinom{9}{2} = \dfrac{9(9-1)}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2}$ donc $\boxed{B = 36}$.
$C = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.
$D = \cos\left(\dfrac{18\pi + 2\pi}{3}\right) = \cos\left(3 \times 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ donc $\boxed{D = -\dfrac{1}{2}}$.
$E = \sin\left(\dfrac{-18\pi + \pi}{6}\right) = \sin\left(-3\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2 \times 2\pi + \pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{E = -\dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2X^2 + 3X - 2 = 0$ d'inconnue X.
2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $(F) : 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$.
3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $(I) : 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 < 0$.

Solution.

1. Le discriminant de $2X^2+3X-2$ est $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-2) = 25$ donc (E) possède deux solutions :

$$X_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{-8}{4} = -2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{-2\,;\frac{1}{2}\right\}.}$

2. D'après le résultat de la question **1.**

$$(F) \iff \sin(x) = -2 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2}$$

Or, pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1$ donc $\sin(x) \neq -2$. Ainsi, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$(F) \iff \sin(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}.$$

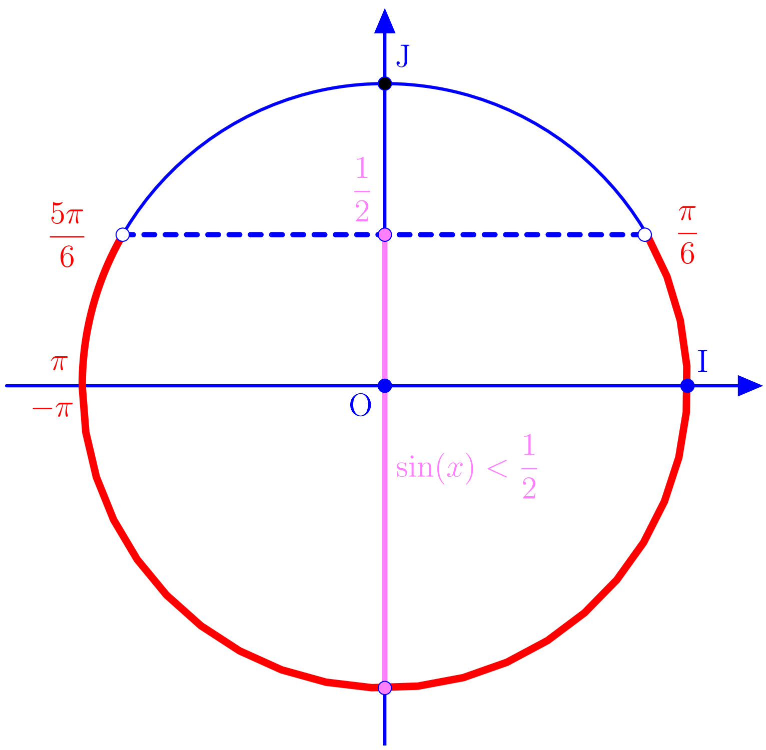
$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (F) \text{ est } \left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}.}$

3. D'après le résultat de la question **1.**, comme $a = 2 > 0$, $2X^2+3X-2 < 0$ si et seulement si $X \in \left]-2\,;-\frac{1}{2}\right[$ donc, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$(I) \iff -2 < \sin(x) < \frac{1}{2}.$$

Or, pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1$ donc, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi]$,

$$(I) \iff \sin(x) < \frac{1}{2}.$$



On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (I) \text{ est } \left]-\pi\,;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right[}.$

Exercice 4. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x-2} \end{array}$$

1. Calculer l'image de 3 par f.
2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f.
3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution.

1. $f(3) = \dfrac{3-1}{3-2} = \dfrac{2}{1}$ donc $\boxed{f(3) = 2}$.
2. On résout $f(x) = 3$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:

$$f(x) = 3 \iff \frac{x-1}{x-2} = 3 \iff x-1 = 3(x-2) \iff x-1 = 3x-6 \iff 5 = 2x \iff x = \frac{5}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique antécédent de 3 par } f \text{ est } \dfrac{5}{2}}$.

3. Soit un réel $y \neq 1$. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$y = f(x) \iff y = \frac{x-1}{x-2} \underset{x\neq 2}{\iff} y(x-2) = x-1 \iff yx - 2y = x - 1$$
$$\iff yx - x = 2y - 1 \iff x(y-1) = 2y-1 \underset{y\neq 1}{\iff} x = \frac{2y-1}{y-1}.$$

De plus, pour tout $y \neq 1$, si $\dfrac{2y-1}{y-1} = 2$ alors $2y-1 = 2(y-1)$ donc $2y-1 = 2y-2$ i.e. $-1 = -2$, ce qui est absurde donc $\dfrac{2y-1}{y-1} \neq 2$.

Ainsi, tout élément $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ admet un unique antécédent $x = \dfrac{2y-1}{y-1} \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et

$$\boxed{f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x-1} \end{array}}$$

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
   - **a.** En utilisant la définition du coefficient binomial à l'aide des factorielles, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   - **b.** En déduire que $S_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.
   - **c.** À l'aide d'un changement d'indice, conclure que $S_n = n2^{n-1}$.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n$ par la formule du binôme de Newton. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Alors,

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \quad = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \end{aligned}$$

donc $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

b. D'après la question précédente, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ et donc, par linéarité de la somme, $\boxed{S_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}}$.

c. Par le changement d'indice $j = k-1$, on déduit de la question précédente que $S_n = n\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}$. Or, par la question **1.**, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$ donc on conclut que $\boxed{S_n = n2^{n-1}}$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

1. Calculer $S_2(\frac{\pi}{3})$ et $S_3(\frac{\pi}{2})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel tel que $x = 0\ [2\pi]$. Calculer $S_n(x)$.

3. a. Démontrer que, pour tous réels a et b,

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

b. Soit x un réel tel que $x \neq 0\ [2\pi]$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Solution.

1. $S_2(\frac{\pi}{3}) = \sin(0 \times \frac{\pi}{3}) + \sin(1 \times \frac{\pi}{3}) + \sin(2 \times \frac{\pi}{3}) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{S_2(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}}$.
$S_3(\frac{\pi}{2}) = \sin(0 \times \frac{\pi}{2}) + \sin(1 \times \frac{\pi}{2}) + \sin(2 \times \frac{\pi}{2}) + \sin(3 \times \frac{\pi}{2}) = 0 + 1 + 0 + (-1)$ donc $\boxed{S_3(\frac{\pi}{2}) = 0}$.

2. Comme $x = 0\ [2\pi]$, pour tout entier k, $kx = 0\ [2\pi]$ donc $\sin(kx) = 0$. Par suite, $S_n(x) = 0$.

3. a. Soit a et b deux réels. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} &= \frac{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) - (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{2} \\ &= \frac{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) - \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}{2} \\ &= \frac{2\sin(a)\sin(b)}{2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $S_n(x) = \dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ ».

- **Initialisation.** D'une part, $S_0(x) = \sin(0 \times x) = \sin(0) = 0$ et, d'autre part, $\dfrac{\sin(\frac{(0+1)x}{2})\sin(\frac{0x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \dfrac{\sin(\frac{x}{2})\sin(0)}{\sin(\frac{x}{2})} = \sin(0) = 0$ donc P_0 est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors, $S_n(x) = \dfrac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ donc

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) + \sin((n+1)x) = S_n(x) + \sin((n+1)x)\\
&= \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} + \sin((n+1)x)\\
&= \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2}) + \sin((n+1)x)\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Ainsi, par le résultat de la question **a.**,

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(x) &= \frac{\cos(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{nx}{2}) - \cos(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{nx}{2}) + \cos((n+1)x - \frac{x}{2}) - \cos((n+1)x + \frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}\\
&= \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{(2n+1)x}{2}) + \cos(\frac{(2n+1)x}{2}) - \cos(\frac{(2n+3)x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}\\
&= \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{(2n+3)x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, toujours d'après le résultat de la question **a.**,

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{(n+2)x}{2} - \frac{(n+1)x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(n+2)x}{2} + \frac{(n+1)x}{2}\right)}{2}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+3)x}{2}\right)}{2}
\end{aligned}$$

donc $S_{n+1}(x) = \dfrac{\sin(\frac{(n+2)x}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ et ainsi P_{n+1} est vraie.

- Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}.$$