TB1 **lundi 4 décembre 2023**

Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

L'utilisation d'une calculatrice ou de tout document est interdite.
Toute sortie anticipée est interdite.

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants. On donnera les résultats sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.

$$A = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \qquad B = \sum_{k=0}^{10} 2 \qquad C = \sum_{k=0}^{5} 2^k \qquad D = \sum_{k=1}^{20} k \qquad E = \sum_{k=1}^{10} k^2.$$

Exercice 2. Calculer les nombres suivants.

$$A = \binom{10}{2} \qquad B = \binom{9}{7} \qquad C = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \qquad D = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) \qquad E = \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right).$$

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 2X^2 + 3X - 2 = 0$ d'inconnue X.

2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $(F) : 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0$.

3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $(I) : 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 < 0$.

Exercice 4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x-2} \end{array}$$

1. Calculer l'image de 3 par f.

2. Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par f.

3. Démontrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

a. En utilisant la définition du coefficient binomial à l'aide des factorielles, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

b. En déduire que $S_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.

c. À l'aide d'un changement d'indice, conclure que $S_n = n2^{n-1}$.

Exercice 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1. Calculer $S_2(\frac{\pi}{3})$ et $S_3(\frac{\pi}{2})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel tel que $x = 0\ [2\pi]$. Calculer $S_n(x)$.

3. **a.** Démontrer que, pour tous réels a et b,

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

b. Soit x un réel tel que $x \neq 0\ [2\pi]$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$